

**MATERIAL
DIDÁTICO
ESTRUTURADO**

#oco
na Aprendizagem

MATEMÁTICA

2023/2024

Autores

Equipe Programa Cientista-Chefe em Educação Básica

UFC/FUNCAPI/SEDUC



Todos os direitos reservados à

Secretaria da Educação do Estado do Ceará – Centro Administrativo Virgílio Távora
Av. General Afonso Albuquerque Lima, s/n – Cambeba. Fortaleza/CE – CEP: 60.822-325

GOVERNADOR
Elmano de Freitas da Costa
VICE-GOVERNADORA
Jade Afonso Romero

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretária Executiva de Ensino Médio e Profissional	Maria Jucineide da Costa Fernandes
Coordenadora de Educação em Tempo Integral	Gezenira Rodrigues da Silva
Coordenadora de Gestão Pedagógica do Ensino Médio	Ideigiane Terceiro Nobre
Coordenadora de Avaliação e Desenvolvimento Escolar para Resultados de Aprendizagem	Kelem Carla Santos de Freitas
Coordenadora Estadual da Formação Docente e Educação a Distância	Vagna Brito de Lima
Coordenador da Educação Profissional	Rodolfo Sena da Penha
Cientista-Chefe da Educação	Jorge Herbert Soares de Lira
Elaboração e revisão de texto	Jorge Herbert Soares de Lira Roberta Eliane Gadelha Aleixo (revisora) Annelise Maymone (revisora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará

L745m Lira, Jorge Herbert Soares de.
Material Didático Estruturado em Matemática 2023 – Aluno – Volume 1 / Jorge Herbert Soares de Lira.
– Fortaleza: UFC: FUNCAP: SEDUC, 2023.
60 p. : il. color.
ISBN 978-65-00-74695-2 (brochura)
ISBN 978-65-00-74694-5 (e-book)

1. Matemática. 2. Proporcionalidade. 3. Funções. 4. Gráficos. I. Título.

CDD 510

Apresentação

Cara/o professora/or, apresentamos a seguir o Material Didático Estruturado (MDE) da Matemática “Foco na Aprendizagem”, que consiste no desenvolvimento de ações integradas voltadas à recomposição das aprendizagens, implementação do Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC) do Novo Ensino Médio (NEM) e do modelo estadual de Educação Híbrida, articulando ações didático-pedagógicas por meio da avaliação diagnóstica-formativa, Tutoria em Língua Portuguesa e Matemática, e formação continuada de professores.

Nesse sentido, o intuito da Coordenadoria de Gestão Pedagógica do Ensino Médio (Cogem) é de subsidiar suporte pedagógico para as atividades de recomposição das aprendizagens da iniciativa Foco na Aprendizagem, com sugestões para o uso do MDE como mais um material de apoio, dentre os já existentes de seu acervo de recursos didáticos nas aulas das áreas de conhecimento e componentes curriculares de sua atuação, respeitando a autonomia didática de cada docente e as especificidades de cada escola.

De modo geral, cada MDE possui suas especificidades, sendo os de Língua Portuguesa e Matemática estruturados por componentes curriculares, e divididos em unidades temáticas voltadas ao desenvolvimento de um objeto de aprendizagem; e os de Ciências Humanas e Ciências da Natureza, estruturados por áreas do conhecimento, divididos em componentes curriculares e subdivididos em capítulos temáticos voltados ao desenvolvimento de um objeto de aprendizagem e em diálogo com elementos do tempo presente das/os estudantes. Nesse sentido, há de se enfatizar a finalidade que atravessa toda a estrutura deste material: possuir uma estrutura padrão em que cada uma das seções didáticas está destinada a favorecer diferentes estratégias de recomposição da aprendizagem.

Coordenadoria da Gestão do Ensino Médio - COGEM
Coordenadoria Estadual de Formação Docente e Ensino a Distância - CODED
Coordenadoria de Avaliação e Desenvolvimento para Resultados de Aprendizagem - COADE
Programa Cientista-Chefe em Educação - FUNCAP/UFC/SEDUC

Proposta Pedagógica

Cara/o estudante,

Este caderno foi pensado com muito critério para que se tornasse um material que possa apoiá-lo em sua formação no Ensino Médio. Esperamos que você possa estudar cada página com o mesmo carinho e dedicação com que ela foi escrita. Os elaboradores e toda a equipe pedagógica envolvida levaram em conta os desafios que os últimos anos representaram nas vidas pessoais e escolares de cada um de vocês.

O Ensino Médio é uma etapa desafiadora não só por que somos expostos a conhecimentos mais amplos e por que somos demandados em habilidades mais complexas. Esses desafios cognitivos vêm junto com a transição para a vida adulta, com todas as incertezas e oportunidades que estão à frente. E, no caso desta geração, vivenciamos, ainda, os efeitos da Pandemia e toda a repercussão que o necessário isolamento social teve sobre a aprendizagem.

Por isso, esse caderno cuida da necessidade de recompor conhecimentos em Matemática que serão indispensáveis no seu futuro, seja acadêmico, seja profissional. A Matemática não é um punhado de fórmulas, um amontado de cálculos e uma disciplina “difícil”, que causa ansiedade e, depois, nada tem a ver com nosso cotidiano. Muito ao contrário: as profissões mais demandadas exigem, cada vez mais, habilidades relacionadas ao pensamento matemático. Além disso, não podemos exercer plenamente nossa cidadania sem entendermos a linguagem matemática: basta ver como decisões econômicas, baseadas em Matemática, afetam o orçamento de nossas famílias. Estamos imersos na sociedade da informação, em que o uso de dados e de algoritmos determina aspectos de nossas vidas que sequer imaginamos.



Portanto, queremos nos juntar a você no esforço de superar suas eventuais dificuldades nos conceitos essenciais da Matemática. Esse é um processo gradual, em que vamos avançando numa espiral pouco a pouco: o que importa é termos clareza de quais são as lacunas que devem ser preenchidas e as metas que devemos atingir. Dito isso, vamos explicar como o uso do caderno pode ajudar nesses **percursos formativos** que iniciam com tarefas que retomam conhecimentos básicos e, progressivamente, avançam para exercícios e problemas mais complexos. Nesses caminhos, você é convidado a trabalhar inclusive com questões de vestibulares, do ENEM e das avaliações externas, como o SPAECE. O caderno é organizado em quatro percursos. Vejamos do que trata cada um deles.

Primeiro percurso

Neste percurso, trabalharemos a localização de **números racionais na reta numérica**. Para isso, precisamos saber quando duas frações são equivalentes e como representar um número racional como fração ou como número decimal. Em seguida, estudaremos relações de **proporcionalidade** entre duas variáveis. Veremos como representar essas relações usando retas no plano cartesiano. Essas retas são gráficos de **funções afins**. Finalizamos o percurso, mostrando as relações de proporcionalidade entre lados e perímetros de triângulos e quadriláteros semelhantes.

Segundo percurso

Agora, retomamos o estudo das funções afins, identificando os gráficos (linhas retas) que as representam e interpretando geometricamente os coeficientes de suas expressões algébricas. Veremos, em seguida, como relacionar funções afins e **equações lineares**. Finalizamos estudando **funções quadráticas** resolvendo problemas a respeito dos seus zeros e valores máximos/mínimos.

Terceiro percurso

Retornamos ao estudo da proporcionalidade, explorando, desta vez, problemas que envolvem **razões, proporções e porcentagens**, em diferentes contextos, inclusive relacionados à Matemática Financeira. Na sequência, estudaremos o comportamento de funções (crescimento, decrescimento, zeros) analisando seus **gráficos**. Finalizamos o percurso com problemas envolvendo **funções exponenciais** e crescimento geométrico.

Quarto percurso

O caderno finaliza com exercícios e problemas sobre **tratamento da informação**, ou seja, a análise de tabelas, de gráficos de barras, de linhas ou de setores. Além disso, trabalharemos questões envolvendo **probabilidade** em vários contextos.

Dicas sobre o uso do caderno

Os percursos são independentes, mas recomendamos que você siga a sequência do primeiro ao quarto. Em cada um, siga a ordem dos exercícios, pois esses aumentam gradualmente em complexidade. Caso sinta dificuldades em alguns deles, registre-as e converse com seu professor a respeito. Não se sinta desencorajado se não conseguir resolver uma ou outra questão: o mais importante é comunicar suas dificuldades para que o professor possa ajudá-lo com mais precisão. Além de recorrer ao professor, recomendamos que consulte outros materiais de apoio. Mencionamos, por exemplo, os seguintes recursos:

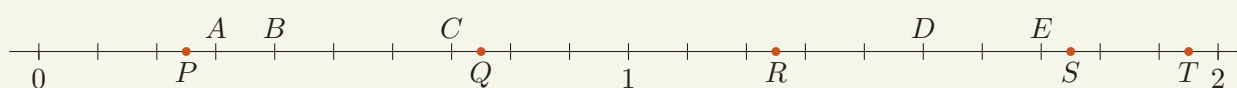
- os cadernos do material estruturado do Foco na Aprendizagem: <https://www.ced.seduc.ce.gov.br/foco-na-aprendizagem-matematica-2/>
- Os módulos do Portal da Matemática da OBMEP: <https://portaldaoobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>
- Khan Academy: <https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra>

Seção 1. Primeiro percurso: coordenadas, semelhança, perímetros e áreas

As tarefas a seguir envolvem conhecimentos prévios fundamentais para desenvolver as habilidades nos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB (terceira série do Ensino Médio):

- D14 - Identificar a localização de números na reta numérica.
- D15 - Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas, entre grandezas.
- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
- D11 - Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
- D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo da área de figuras planas.

Questão 1 Observe o segmento da reta numérica representado na seguinte figura.



Agora, faça as seguintes atividades.

i) Determine os pontos que correspondem aos números

$$\frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{5} \quad 0,6 \quad 0,9 \quad 1,2 \quad \frac{14}{10} \quad \frac{9}{5}$$

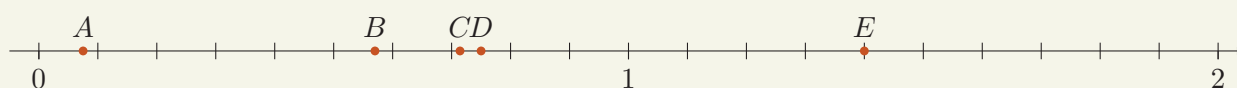
ii) Determine as frações que correspondem aos pontos A, B, C, D e E.

iii) Determine os números decimais que correspondem aos pontos P, Q, R, S e T.

iv) Determine a localização (mesmo que aproximada) dos números racionais

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{8}{9} \quad 0,25 \quad 0,625 \quad 1,25 \quad 1,75 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{6} \quad \frac{9}{6}$$

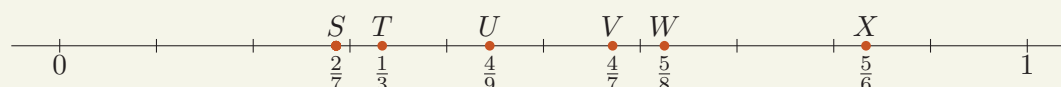
Questão 2 Observe o segmento da reta numérica representado na seguinte figura.



Assinale a alternativa em que o ponto corresponde corretamente ao número racional.

- A) $A = \frac{7}{5}$ B) $B = 0,75$ C) $C = \frac{5}{7}$ D) $D = 0,57$ E) $E = 0,075$

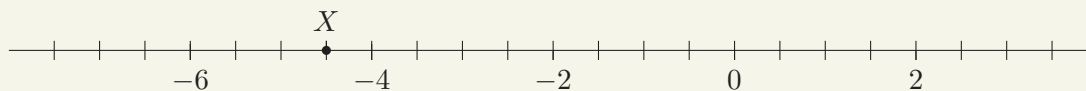
Questão 3 — SABE - Item M120905E4, adaptado. Observe a reta numérica abaixo. Ela está dividida em segmentos de mesma medida.



O número $\frac{3}{4}$ está localizado entre os pontos

- A) S e T. B) T e U. C) U e V. D) V e W. E) W e X.

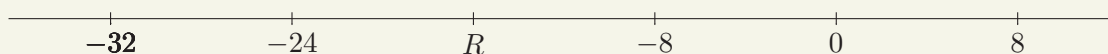
Questão 4 — SPAECE - Item M090307H6. Observe abaixo a reta numérica dividida em segmentos de mesma medida.



O número racional representado pelo ponto X é

- A) $-6,4$. B) $-5,5$. C) $-4,5$. D) $-4,6$.

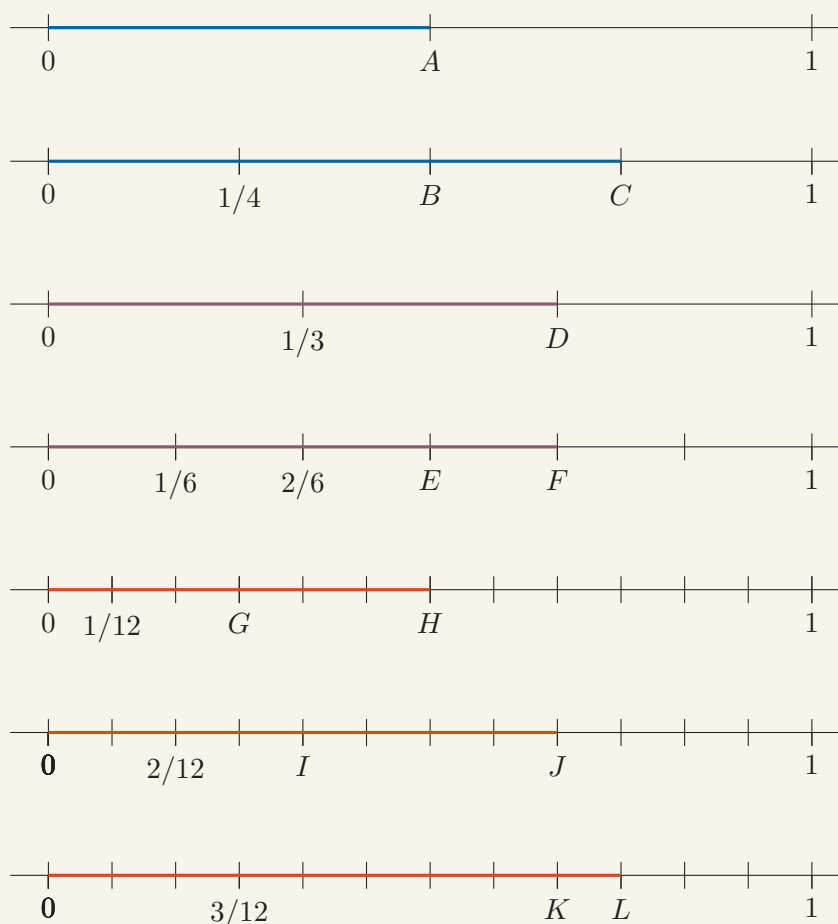
Questão 5 — SAEPE - Item M110764E4, adaptado. Caroline está completando a reta numérica representada abaixo, na qual as distâncias entre dois pontos consecutivos são todas iguais.



Para completar essa reta numérica, qual número Caroline deve escrever no lugar da letra R ?

- A) -25 . B) -23 . C) -16 . D) -9 . E) -7 .

Questão 6 Nas retas numéricas a seguir, quais frações correspondem aos pontos $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ e L ?



Solução. Observe que os pontos A, B, E e H coincidem com o ponto que fica à mesma distância

de 0 e de 1. Logo, esse ponto divide o segmento de reta de 0 a 1 em duas partes iguais e, portanto,

$$A = \frac{1}{2} = B = \frac{2}{4} = E = \frac{3}{6} = H = \frac{6}{12}.$$

Agora, veja que o ponto G divide o segmento de reta de 0 a H em duas partes iguais. Além disso, observe que o segmento de reta que contém G está dividido em 12 partes com mesma medida. Logo,

$$G = \text{metade de } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad G = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Podemos também ver que os pontos D, F, J e K coincidem, ou seja $D = F = J = K$, ou seja,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}.$$

Por fim, verificamos que

$$C = \frac{3}{4} = L = \frac{9}{12} \quad \text{e} \quad I = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Questão 7 Usando as retas numéricas na questão 6, encontre o valor da *incógnita* x ou da *incógnita* y em cada uma das seguintes *equivalências de frações*.

i) $\frac{1}{2} = \frac{y}{4}$

ii) $\frac{1}{x} = \frac{2}{6}$

iii) $\frac{y}{3} = \frac{4}{6}$

iv) $\frac{8}{12} = \frac{4}{x}$

Questão 8 Complete as seguintes frações com numeradores ou denominadores de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{\quad} = \frac{\quad}{12} = \frac{15}{16} = \frac{18}{\quad} = \frac{\quad}{28} = \frac{\quad}{32}$$

Questão 9 Complete a seguinte tabela com valores das *variáveis* x e y , considerando que são diretamente proporcionais.

Valores de y	3	6	-	-	15	18	-	-
Valores de x	4	-	12	16	-	-	28	32

Observação 0.1 A equivalência de frações pode ser entendida como uma **relação de proporcionalidade**: dizemos que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

quando m está para n assim como p está para q , situação em que vale a igualdade do produto dos meios e do produto dos extremos, ou seja,

$$q \cdot m = p \cdot n,$$

uma vez que

$$q \cdot \cancel{n} \cdot \frac{m}{\cancel{n}} = n \cdot \cancel{q} \cdot \frac{p}{\cancel{q}}$$

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar **critérios práticos**, que são consequências lógicas da definição, para verificar se duas frações são equivalentes. Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** a natural

diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. De fato,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a},$$

visto que

$$m \cdot n \cdot a = n \cdot m \cdot a.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}.$$

Neste caso, a deve ser um *divisor ou fator comum* de m e n com $m : a = p$ e $n : a = q$. Assim, temos

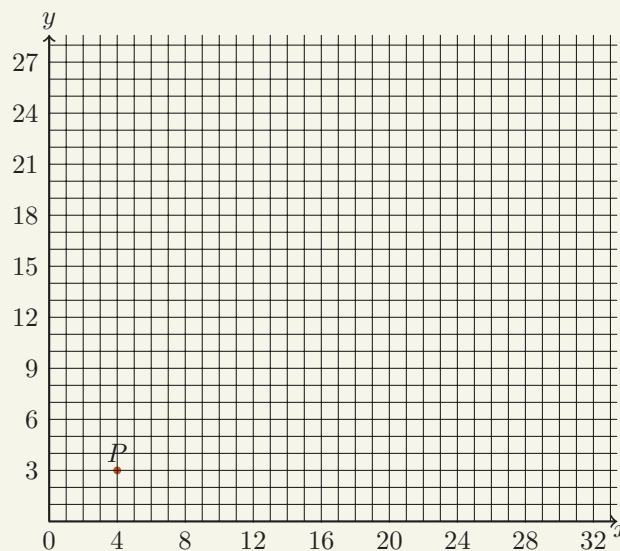
$$\frac{m}{n} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{p}{q} = \frac{m : a}{n : a},$$

como queríamos demonstrar. Por exemplo, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são equivalentes, pois $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$ e, da mesma forma, as frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$ são também equivalentes, pois

$$\frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16},$$

o que comprova a equivalência dessas frações.

Questão 10 Represente os valores das variáveis x e y na tabela da questão 9 como coordenadas de pontos no seguinte plano cartesiano. Veja o exemplo do ponto $P = (4, 3)$ em que $x = 4$ e $y = 3$.



Agora, responda às seguintes perguntas.

- 1) Os pontos devem estar alinhados, ou seja, devem pertencer a uma mesma reta r . Você conseguiu perceber isso em seu desenho?
- 2) Qual o valor de y para que o ponto $(8, y)$ pertença à reta r ?
- 3) Qual o valor de x para que o ponto $(x, 9)$ pertença à reta r ?
- 4) Qual o valor de y para que o ponto $(32, y)$ pertença à reta r ?
- 5) Qual o valor de x para que o ponto $(x, 27)$ pertença à reta r ?
- 6) Por qual razão os pontos que você representou no plano devem estar alinhados, ou seja, devem pertencer todos a uma mesma reta?
- 7) Qual relação existe entre as coordenadas x e y para que o ponto (x, y) pertença à reta r ?

- 8) O ponto $(9, 6)$, em que $x = 9$ e $y = 6$, pertence à reta r ? Justifique sua resposta.
- 9) O ponto $(10, 15/2)$, em que $x = 10$ e $y = 15/2$, pertence à reta r ? Justifique sua resposta.
- 10) Qual o valor de x para que o ponto $(x, 15/4)$ pertença à reta r ?
- 11) Qual o valor de y para que o ponto $(3, y)$ pertença à reta r ?
- 12) Existe algum ponto (x, y) na reta r tal que $x + y = 14$?

Observação 0.2 Os valores de x e y na tabela da questão 9 satisfazem a seguinte **relação de proporcionalidade**:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{4}, \quad (1)$$

sempre que $x \neq 0$. Por exemplo, os valores $x = 8$ e $y = 6$ podem estar na tabela, pois

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

frações que são equivalentes, uma vez que $6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$. Já os valores $x = 9$ e $y = 6$ *não* podem estar na tabela, dado que as frações

$$\frac{6}{9} \text{ e } \frac{3}{4}$$

não são equivalentes, visto que

$$6 \cdot 4 \neq 9 \cdot 3.$$

Voltando ao caso geral, observe que a relação de equivalência (1) pode ser escrita na forma

$$y = \frac{3}{4}x. \quad (2)$$

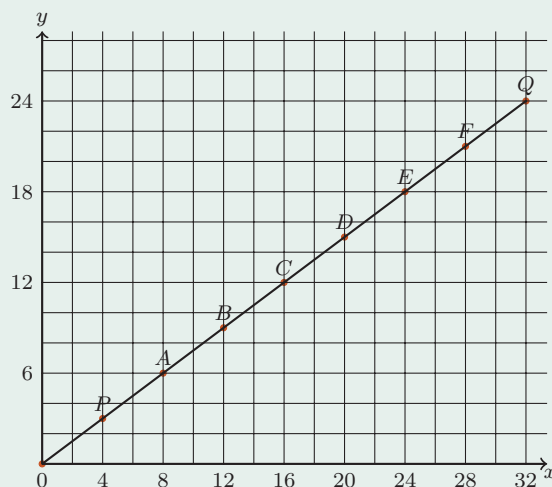
Essa expressão mostra que a variável y é uma **função afim** da variável x . Se, por exemplo, tomamos $x = 8$, temos

$$y = \frac{3}{4} \cdot 8 = 3 \cdot \frac{8}{4} = 3 \cdot 2 = 6,$$

ou seja, o valor da variável y correspondente ao valor $x = 8$ é $y = 6$. Por essa razão, o ponto com coordenadas $(8, 6)$ está alinhado aos demais pontos cujas coordenadas completam a tabela na questão 9, a saber,

$$(12, 9), (16, 12), (20, 15), (24, 18), (28, 21), (32, 24).$$

Lembre-se que você representou esses pontos no plano cartesiano na questão 10 e, assim, verificou que pertencem a uma mesma reta, que denotamos por r . Essa reta r , representada na seguinte figura, é o **gráfico** da função 2.



Note que o alinhamento dos pontos em uma mesma reta no plano significa que, aumentando 4 unidades no valor da variável x , avançamos $3 = \frac{3}{4} \cdot 4$ unidades no valor da variável y .

Note que, na função afim em (2), o **coeficiente angular** é dado por $a = 3/4$. Já o coeficiente linear é dado por $b = 0$, uma vez que o gráfico dessa função afim intersecta o eixo y no ponto $(0,0)$, ou seja, na origem: de fato, se $x = 0$, então $y = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$.

Questão 11 Considere o gráfico da função afim

$$y = \frac{3}{4}x \quad (3)$$

representado na figura exposta na observação 0.2. Responda às seguintes questões:

- 1) Quais as coordenadas (x, y) dos pontos P, A, B, C, D, E, F e Q ?
- 2) Essas coordenadas satisfazem a relação (3)?
- 3) Essas coordenadas satisfazem a equação linear $3x - 4y = 0$?
- 4) O ponto $(6, 4)$ pertence ao gráfico da função afim?
- 5) O ponto $(14, 9/2)$ pertence ao gráfico da função afim?
- 6) As coordenadas do ponto $(14, 10)$ satisfazem a equação linear $3x - 4y = 0$?
- 7) As coordenadas do ponto $(6, 9/2)$ satisfazem a equação linear $3x - 4y = 0$?
- 8) Qual a taxa de variação da função (3) entre os pontos P e A ?
- 9) Qual a taxa de variação da função (3) entre os pontos P e Q ?
- 10) Qual a taxa da variação da função (3) entre o ponto P e um ponto (x, y) qualquer do gráfico?
- 11) As coordenadas x dos pontos P, A, B, C, D, E, F e Q estão em progressão aritmética. Qual sua razão?
- 12) As coordenadas y dos pontos P, A, B, C, D, E, F e Q estão em progressão aritmética. Qual sua razão?
- 13) Dividindo essas razões, obtemos a taxa de variação da função afim. Verdadeiro ou falso?

Observação 0.3 Veja que a variável y é função afim da variável x segundo a expressão

$$y = \frac{3}{4}x$$

se, e somente se, $4y = 3x$, isto é, se, e somente se, as coordenadas (x, y) satisfazem a **equação linear**

$$3x - 4y = 0. \quad (4)$$

Portanto, a reta r que contém os pontos P e Q , representada na figura da observação 0.2, é o *lugar geométrico* dos pontos (x, y) cujas coordenadas são as soluções da equação linear (4). Por exemplo, o ponto $(8, 6)$, com $x = 8$ e $y = 6$ pertence a essa reta, visto que

$$3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 24 - 24 = 0.$$

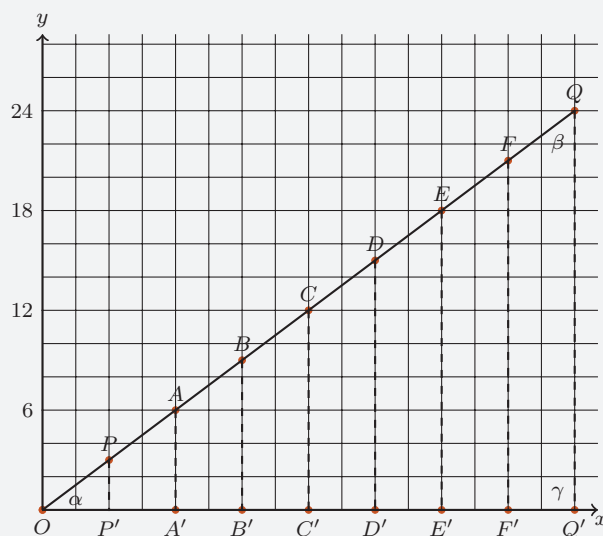
Já o ponto $(9, 6)$, com $x = 9$ e $y = 6$, **não** pertence à reta r , posto que

$$3 \cdot 9 - 4 \cdot 6 = 27 - 24 = 3 \neq 0.$$

De fato, o ponto com $x = 9$ que pertence a essa reta é o ponto $(9, 27/4)$, uma vez que

$$3 \cdot 9 - 4 \cdot \frac{27}{4} = 27 - 27 = 0.$$

Considere, novamente, o gráfico da função afim $y = \frac{3}{4}x$ representado na seguinte figura.



Nessa figura, destacamos os **triângulos retângulos** OPP' , OAA' , OBB' , OCC' , ODD' , OEE' , OFF' e OQQ' . Um dos vértices desses triângulos é a origem O , outro é um ponto sobre o gráfico da função (por exemplo, P) e o terceiro é a **projeção** desse ponto do gráfico sobre o eixo x (por exemplo, P'). Na figura, destacamos um desses triângulos, a saber, o triângulo OPP' .

Observe que esses triângulos têm o mesmo ângulo α no vértice O . Além disso, os ângulos nos pontos correspondentes desses triângulos têm a mesma medida, ou seja,

$$\angle P = \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \angle Q \doteq \beta$$

e

$$\angle P' = \angle A' = \angle B' = \angle C' = \angle D' = \angle E' = \angle F' = \angle Q' \doteq \gamma.$$

Note que γ é um **ângulo reto**, ou seja, sua medida é igual a 90° (lê-se “noventa graus”).

Questão 12 Dadas as informações no gráfico anterior, resolva os seguintes problemas.

- 1) Qual a soma das medidas dos ângulos $\alpha + \beta + \gamma$?
- 2) Qual a soma das medidas dos ângulos $\alpha + \beta$?
- 3) Mostre a seguinte igualdade entre as razões:

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \frac{DD'}{OD'} = \frac{EE'}{OE'} = \frac{FF'}{OF'} = \frac{QQ'}{OQ'} = \frac{3}{4} \quad (5)$$

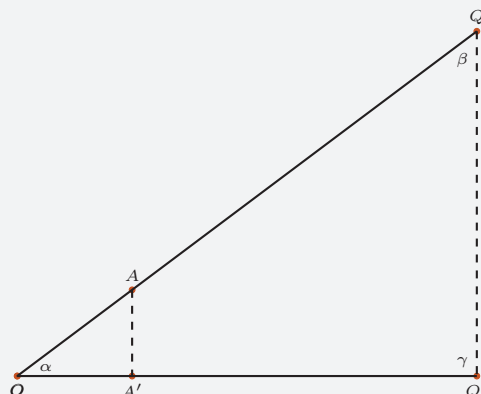
Os triângulos OAA' e OQQ' acima são **semelhantes**, isto é, as medidas dos lados correspondentes nesses dois triângulos são *proporcionais*. Para verificar isso, note que os pares de lados correspondentes nesses triângulos são

$$OA \text{ e } OQ \quad OA' \text{ e } OQ' \quad AA' \text{ e } QQ'.$$

Observe que a medida de AA' está para a medida de QQ' assim como a medida de OA' está para a medida de OQ' , ou seja,

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{QQ'}{OQ'}.$$

Essas razões são iguais à **tangente** $\operatorname{tg} \alpha$ do ângulo α .



Observe que esse é um ângulo interno de ambos os triângulos no vértice O . Da mesma forma, a medida de OA' está para a medida de OQ' assim como a medida de OA está para a medida de OQ , ou seja,

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OQ'}{OQ}.$$

Essa razão comum aos dois triângulos é chamada do **coseno** do ângulo α e denotada por $\cos \alpha$. Finalmente, temos a igualdade entre as razões

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{QQ'}{OQ}.$$

Essa razão define o **seno** $\operatorname{sen} \alpha$ do ângulo α . Em nosso exemplo, temos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{3^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2} = \frac{9 + 16}{25} = 1.$$

Esse resultado é um caso particular do **Teorema de Pitágoras**, segundo o qual as medidas dos segmentos OA' e AA' (catetos) no **triângulo retângulo** OAA' estão relacionados à medida do segmento OA (hipotenusa) pela seguinte expressão

$$OA'^2 + AA'^2 = OA^2. \quad (6)$$

Outro **critério de semelhança** que permite verificar que, de fato, os triângulos OAA' e OQQ' são semelhantes é o seguinte: os ângulos nos vértices correspondentes têm medidas iguais, ou seja,

- os ângulos de OAA' e OQQ' no vértice O têm medida α ;
- os ângulos de OAA' em A e de OQQ' em Q têm medida β ;
- os ângulos de OAA' em A' e de OQQ' em Q' têm medida γ .

Observação 0.4 As razões em (5) são todas iguais a $3/4$, o **coeficiente angular** da função afim (3). Vimos que elas definem a chamada **tangente** do ângulo α . Logo,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4},$$

ou seja, o coeficiente angular da função afim é igual a tangente do ângulo entre o eixo x e o gráfico

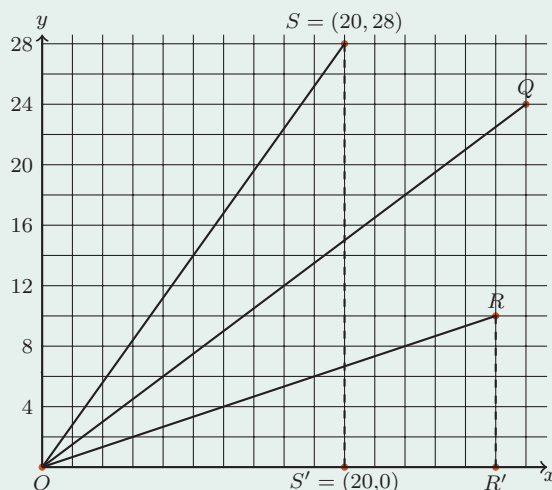
da função. Note que, quanto maior o ângulo α (medido entre 0 e 90°) entre o eixo x e o gráfico da função (ou seja, quanto mais *inclinado* o gráfico, em relação à direção horizontal), maior o coeficiente angular da função afim. Esse coeficiente angular é a tangente do ângulo α .

Veja, na seguinte figura, o exemplo das funções afins

$$y = \frac{1}{3}x, \quad y = \frac{3}{4}x \quad \text{e} \quad y = \frac{7}{5}x,$$

cujos coeficientes angulares estão na seguinte ordem

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{5}.$$



A reta que contém os pontos O e R é o gráfico *menos* inclinado em relação ao eixo x dentre os três gráficos na figura. Observe que o coeficiente angular da função afim $y = \frac{1}{3}x$ é igual a $a = 1/3$: essa é a taxa de variação dessa função. De fato, dados os pontos $O = (0,0)$ e $R = (x,y)$ no gráfico da função, essa taxa de variação é dada por

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x} = \frac{1}{3}.$$

Note que essa taxa de variação é a tangente do ângulo β no vértice O do triângulo ORR' , pois

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{RR'}{OR'} = \frac{y}{x},$$

onde (x,y) são as coordenadas do ponto R . Da mesma forma, a reta que contém os pontos O e S é o gráfico de *maior* inclinação dentre os três gráficos na figura. Se as coordenadas do ponto S são dadas por $(20,28)$, essa inclinação é dada pela tangente do ângulo γ no vértice O do triângulo OSS' , ou seja, por

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{SS'}{OS'} = \frac{28}{20} = \frac{28:4}{20:4} = \frac{7}{5},$$

ou seja, a inclinação da reta é dada pela *taxa de variação* da função

$$y = \frac{7}{5}x.$$

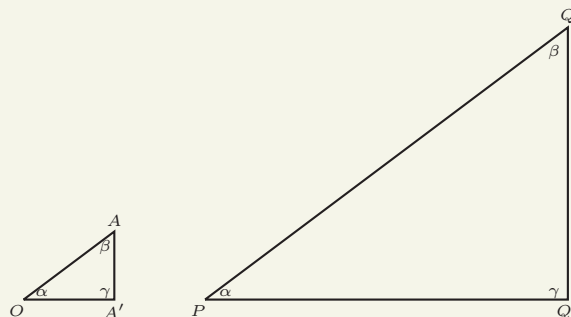
Concluimos que a inclinação da reta é igual a taxa de variação da função afim que, por sua vez, é dada pelo seu coeficiente angular.

Questão 13 A seguinte figura representa triângulos semelhantes OAA' e PQQ' , sendo que

$$\angle O = \angle P = \alpha, \quad \angle A = \angle Q = \beta, \quad \angle A' = \angle Q' = \gamma.$$

Suponha, além disso, que

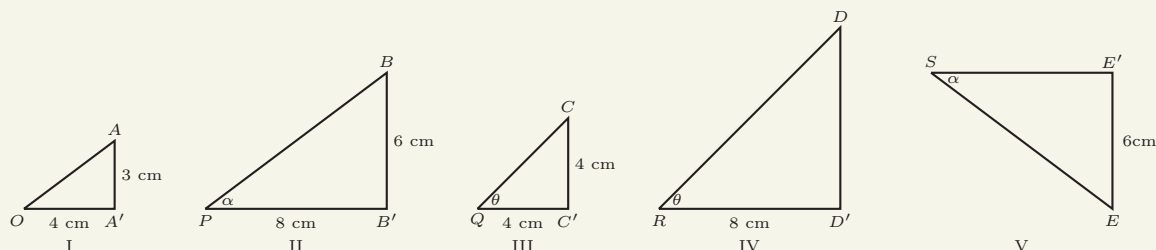
$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{QQ'}{PQ'} = \frac{3}{4}.$$



Responda às seguintes questões.

- 1) É verdade que $\frac{OA'}{OA} = \frac{PQ'}{PQ}$? Em caso afirmativo, qual a **razão de semelhança**?
- 2) É verdade que $\frac{AA'}{OA} = \frac{QQ'}{PQ}$? Em caso afirmativo, qual a razão de semelhança?
- 3) Se $OA' = 4$ centímetros e $PQ' = 16$ centímetros, quais as medidas de AA' e de QQ' ?
- 4) Nessas condições, quais as medidas de OA e de PQ ?
- 5) Nessas condições, qual a razão entre os perímetros dos dois triângulos?
- 6) Nessas condições, qual a razão entre as áreas dos dois triângulos?

Questão 14 As seguintes figuras representam cinco triângulos retângulos (I, II, III, IV e V) e as respectivas medidas de alguns de seus lados ou ângulos.



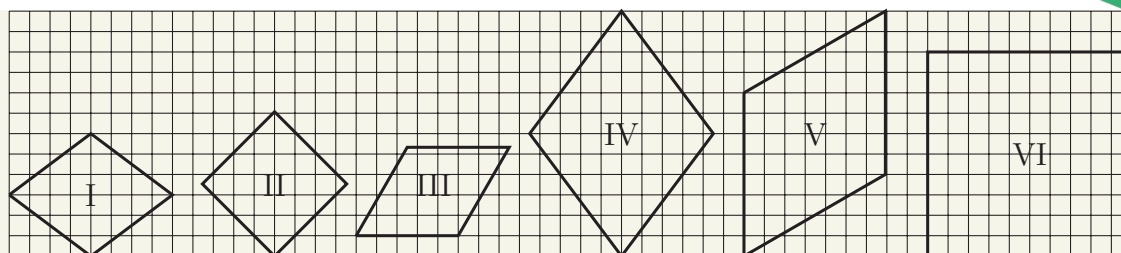
Quais desses triângulos são semelhantes?

- A) I e III B) I, II e V C) I e IV D) III e V E) II, III e IV

Questão 15 Calcule as áreas e as tangentes dos ângulos α e θ nos triângulos I a V na questão 14 anterior.

Questão 16 Use o Teorema de Pitágoras para calcular os perímetros dos triângulos I a V na questão 14.

Questão 17 As seguintes figuras representam cinco quadriláteros (I, II, III, IV, V e VI). Cada um dos lados dos quadriláteros I, II e III mede 5 centímetros.



Assinale a alternativa em que temos um par de quadriláteros semelhantes.

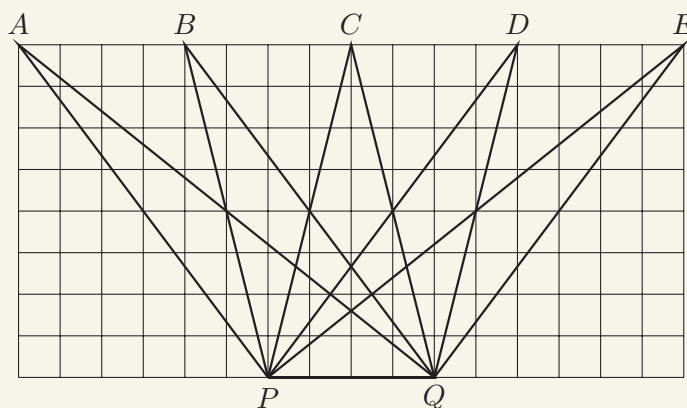
- A) I e II B) I e III C) II e IV D) II e VI E) IV e V

Questão 18 A respeito dos quadriláteros de I a VI na questão 17, calcule valores exatos ou estime valores aproximados

- 1) das áreas dos quadriláteros.
- 2) das razões entre as áreas de pares de quadriláteros.
- 3) das medidas das tangentes dos ângulos em cada um dos quadriláteros.
- 4) dos perímetros dos quadriláteros.
- 5) das razões entre os perímetros de pares de quadriláteros.

Observação 0.5 Os quadrados representados nas figuras II e IV são semelhantes: de fato, dois quadrados são sempre semelhantes (por quê?) Os lados do quadrado II medem 5 centímetros e os lados do quadrado IV medem 10 centímetros. Logo, a **razão** de proporcionalidade entre os lados (e os perímetros) do quadrado IV e do quadrado II é igual a 2. No entanto, observe que a razão entre a área do quadrado IV e a área do quadrado II é igual a 4, ou seja, a 2^2 : de fato, temos $10^2/5^2 = 4$.

Questão 19 Na figura seguinte, os quadrados que formam a malha quadriculada têm lados medindo 1 cm cada um.

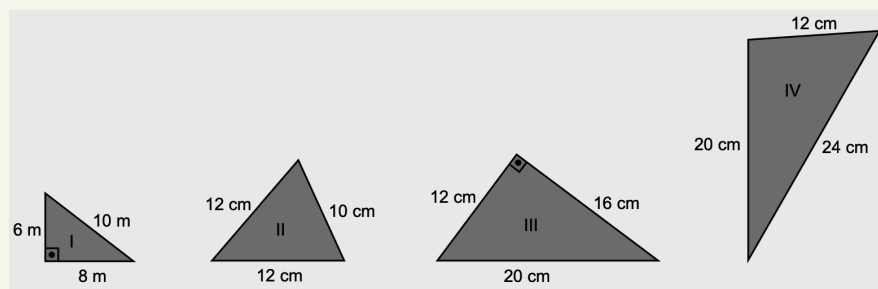


Responda às seguintes questões a respeito dos triângulos PAQ , PBQ , PCQ , PDQ e PEQ destacados na figura.

- 1) Os triângulos PAQ e PEQ são semelhantes?
- 2) Os triângulos PBQ e PDQ são semelhantes?
- 3) Os triângulos PAQ e PCQ são semelhantes?
- 4) Os triângulos PAQ e PBQ são semelhantes?
- 5) Os triângulos PBQ e PCQ são semelhantes?

- 6) Qual a altura desses triângulos com respeito a base PQ , comum a todos eles?
- 7) As áreas desses triângulos são iguais. Por qual razão?
- 8) Qual(is) desse(s) triângulo(s) tem (têm) o maior perímetro?
- 9) Qual(is) desse(s) triângulo(s) tem (têm) o menor perímetro?
- 10) Quais os senos, cossenos e tangentes dos ângulos internos do triângulo PCQ ?

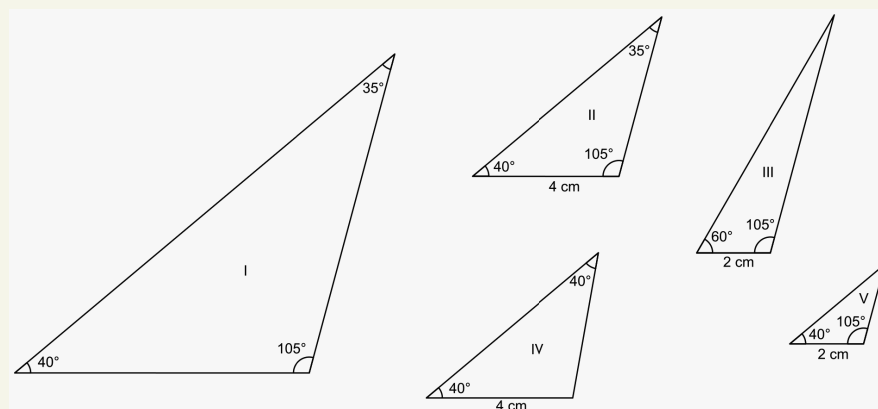
Questão 20 — SAEPE - Item M120392ES. No desenho abaixo estão representados os triângulos I, II, III e IV e suas medidas em centímetros.



O par de triângulos semelhantes nesse desenho é

- A) I e II. B) I e III. C) I e IV. D) II e IV. E) III e IV.

Questão 21 — SAEPE - Item M110375E4. Observe os triângulos abaixo.

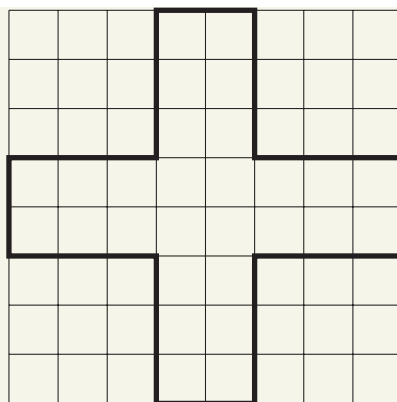


Qual desses triângulos são semelhantes?

- A) I, II e III. B) I, II e V. C) I e III. D) II e IV. E) III e V.

Observação 0.6 Com a ajuda de seu professor(a), faça desenhos geométricos, usando uma malha quadriculada, para “comprovar” que dois triângulos OAB e $O'A'B'$ são semelhantes se uma das seguintes condições ocorre: a) têm ângulos (digamos, em O e O') com mesma medida e as razões entre os lados $OA/O'A'$ e $OB/O'B'$ são iguais; ou b) ângulos correspondentes têm a mesma medida, ou seja, $\angle O = \angle O'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$. Nesse caso, “comprove”, em seus desenhos, que a razão entre os perímetros dos triângulos é igual a razão entre seus lados e que a razão entre suas áreas é igual ao *quadrado* da razão entre os lados.

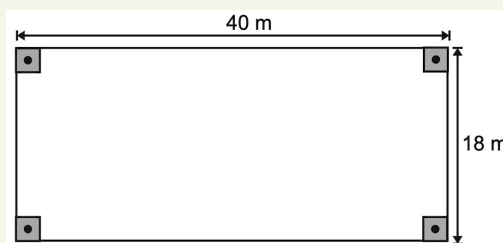
Questão 22 Na figura seguinte, os quadrados que formam a malha quadriculada têm lados medindo 2 cm cada um.



Sendo assim, qual o perímetro da figura em forma de cruz destacada na figura seguinte?

- A) 21 cm B) 28 cm C) 32 cm D) 56 cm E) 64 cm

Questão 23 — SPAECE - Item M110782E4. O desenho abaixo apresenta as dimensões da laje da casa de Isadora. Ela irá colocar um muro de proteção nessa laje e, para calcular a quantidade de material a ser comprado, precisou medir o seu contorno.



Qual é o perímetro da laje dessa casa?

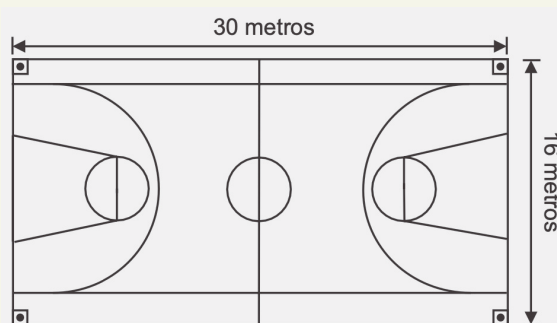
- (a) 58 m (b) 116 m (c) 232 m (d) 360 m (e) 720 m

Questão 24 — SAEPE - Item M120195H6. Paulo comprou um terreno retangular de $120\,000\text{ m}^2$. Esse terreno possui 200 m de largura.

Quanto mede o comprimento desse terreno?

- A) 200 m B) 300 m C) 400 m D) 600 m E) 800 m

Questão 25 — SAEPE - Item M120195H6. Observe no desenho abaixo o projeto da quadra de basquete que será construída no condomínio em que Bruno mora.

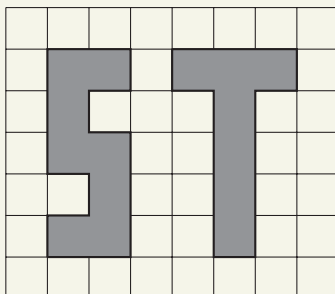


A medida da área dessa quadra de basquete, em metros quadrados, será

- A) 480. B) 240. C) 92. D) 46. E) 14.

Questão 26 Dê exemplos de retângulos com mesma área e perímetros diferentes, e vice-versa.

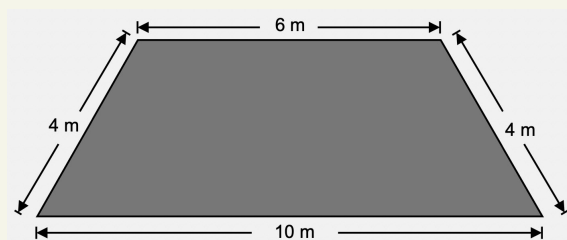
Questão 27 Observe as letras S e T desenhadas geometricamente na seguinte figura:



Podemos afirmar que

- A) a área da letra S é menor do que a área da letra T.
B) a área da letra S é igual a área da letra T.
C) o perímetro da letra S é igual ao perímetro da letra T.
D) o perímetro da letra S é maior do que o perímetro da letra T.

Questão 28 — SAEPE - Item M100270E4. Marta comprou um terreno na forma de trapézio cujas medidas estão representadas no desenho abaixo. Para construir um muro em torno desse terreno, ela precisa calcular o seu perímetro.



Qual é o perímetro desse terreno?

- A) 12 m B) 20 m C) 24 m D) 32 m E) 40 m

Solução. O perímetro é dado por $4 + 4 + 6 + 10 = 24$ m, o que corresponde à alternativa C). ■

Questão 29 Qual a área do terreno de Marta?

- A) 20 m^2 B) 24 m^2 C) 32 m^2 D) $8\sqrt{12} \text{ m}^2$ E) $10\sqrt{12} \text{ m}^2$

Solução. O cálculo da área requer determinarmos a altura h do trapézio, ou seja, a distância entre os segmentos que são paralelos, chamados **bases**. Veja que a diferença entre as medidas das bases é igual a $10 - 6 = 4$ metros. Pela simetria da figura, deduzimos que

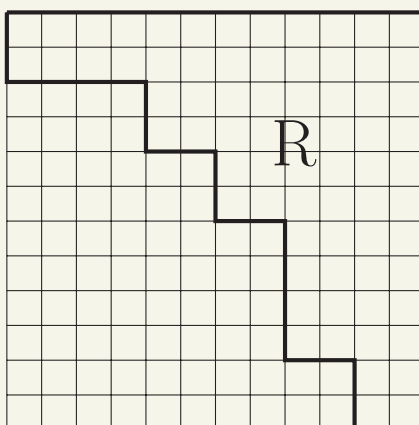
$$2^2 + h^2 = 4^2,$$

ou seja, $h^2 = 16 - 4 = 12$. Portanto, $h = 2\sqrt{3}$ metros. Com essa medida, podemos dividir o trapézio em dois triângulos sem sobreposição, um dos quais tem base 10 m e a altura do trapézio; e outro, que tem base 6 m e altura do trapézio. Sendo assim, a área do trapézio e a soma das áreas desses triângulos, ou seja,

$$\frac{10 \cdot 2\sqrt{3}}{2} + \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(10 + 6) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 16 \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 8 \cdot \sqrt{12} \text{ m}^2.$$

■

Questão 30 Marcos tem um terreno na forma de um quadrado. A seguinte figura representa esse terreno, visto de cima, dividido em quadrados de lados iguais a 10 m.



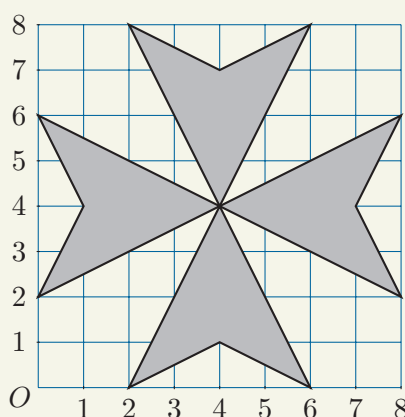
Se Marcos deseja construir um muro separando as duas partes do terreno destacadas na figura, quantos metros teria esse muro?

- A) 48 m B) 200 m C) 240 m D) 400 m E) 480 m

Questão 31 A área da região R na figura corresponde a que percentual da área total do terreno?

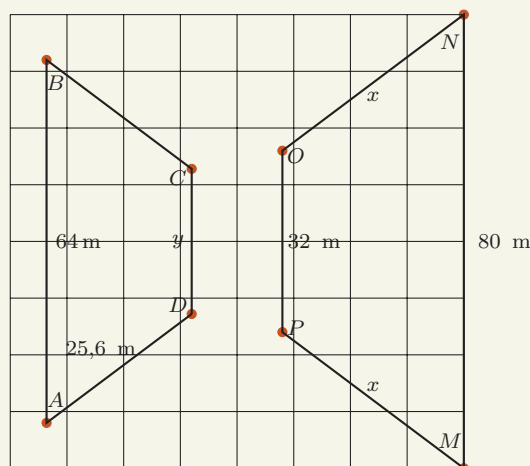
- A) 48% B) 50% C) 72% D) 75%

Questão 32 Na seguinte figura, cada um dos 64 quadrados que formam o quadrado maior tem lados medindo 1 unidade de comprimento.



Qual a razão entre a área destacada e área total do quadrado?

Questão 33 Na figura abaixo, estão representados os trapézios $ABCD$ e $MNOP$, os quais são semelhantes.



De acordo com a figura, faça as seguintes atividades.

- Identifique os pares de ângulos internos nos trapézios que são congruentes.
- Determine a razão (de proporcionalidade) entre as medidas dos lados AB e MN .
- Determine as medidas x e y .
- Determine os perímetros dos dois trapézios e, em seguida, calcule a razão entre esses perímetros.
- Determine a área do trapézio $MNOP$.
- Determine a razão entre as áreas dos dois trapézios e a utilize para calcular a área do trapézio $ABCD$.

Seção 2. Segundo percurso: coordenadas, proporcionalidade e funções

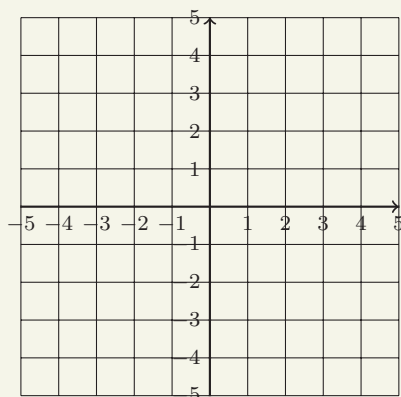
As tarefas a seguir envolvem conhecimentos prévios fundamentais para desenvolver as habilidades nos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB (terceira série do Ensino Médio):

- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D15 - Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas, entre grandezas.
- D19 - Resolver situação problema envolvendo uma função de primeiro grau.
- D22 - Resolver problema envolvendo PA/PG, dada a fórmula do termo geral.
- D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- D25 - Resolver problemas que envolvam os pontos de máximos ou de mínimo no gráfico de uma função do segundo grau.

Questão 34 Em seu caderno, desenha uma malha quadriculada representando o plano cartesiano, de acordo com os seguintes passos: a) trace duas retas r e s perpendiculares uma a outra; b) denote o ponto de intersecção de r e s por O ; c) trace retas paralelas a r , de modo que a distância entre duas retas consecutivas seja sempre a mesma (digamos, 1 centímetro); d) trace retas paralelas a s , de modo que a distância entre duas retas consecutivas seja sempre a mesma da letra c (digamos, 1 centímetro). Observe que, com esse procedimento, você “divide” o plano em quadrados de lados com medidas iguais a 1 centímetro. Quando finalizar seu desenho, marque, no seu modelo de plano cartesiano, os pontos $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$ e $(4/10, 6/10)$.

Questão 35 a) Marque, no plano cartesiano abaixo, os pontos com coordenadas

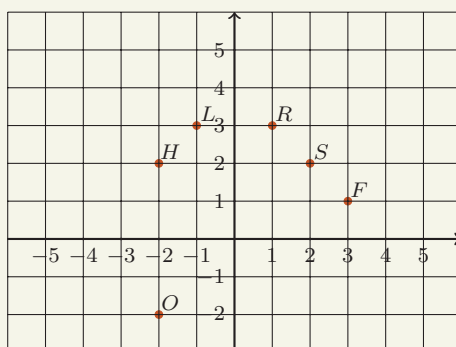
$$A = (-4, 3) \quad B = (-4, -3) \quad C = (3, 4) \quad D = (-3, 4) \quad E = (4, -3) \quad F = (4, 3)$$



b) Determine para quais desses pontos as coordenadas (x, y) satisfazem a equação $y = x + 1$. Em seguida, trace uma reta contendo esses pontos.

c) Faça o mesmo com relação à equação $y = -x + 1$.

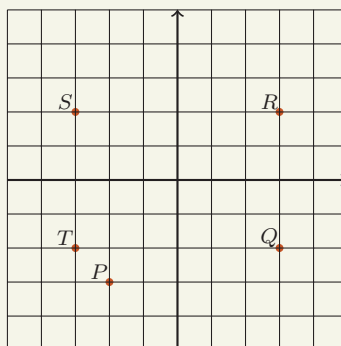
Questão 36 — PAEBES - Item M120205G5, adaptado. Observe o plano cartesiano abaixo.



Os pontos que têm coordenadas $(-2, -2)$ e $(1, 3)$ são, respectivamente,

- A) O e R. B) S e R. C) H e R. D) O e L. E) O e F.

Questão 37 — SAEPE - Item M120701H6, adaptado. Observe os pontos P, Q, R, S e T representados no plano cartesiano abaixo.

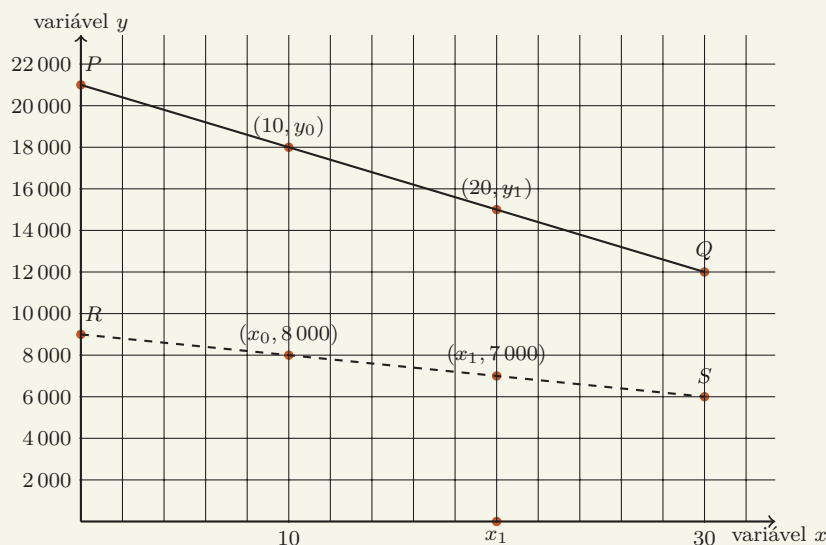


Em qual desses pontos a abscissa é -3 e a ordenada é -2 ?

- A) P B) Q C) R D) S E) T

A sequência das questões 38 a 44 faz referência à figura no enunciado da questão 38.

Questão 38 Observe os seguintes **gráficos no plano cartesiano**, em que alguns pontos estão destacados.



Determine os seguintes dados:

- 1) As coordenadas x_0 e x_1 .
- 2) As coordenadas y_0 e y_1 .
- 3) As coordenadas dos pontos P e Q .
- 4) As coordenadas dos pontos R e S .

Questão 39 No **plano cartesiano** representado na figura da questão 38, marque os pontos cujas coordenadas são

- 1) $(0, 6\,000)$ 2) $(10, 12\,000)$ 3) $(15, 0)$ 4) $(20, 11\,000)$ 5) $(25, 6\,500)$

Questão 40 Observe, na figura da questão 38, o **gráfico** representado pela linha contínua que contém os pontos P e Q . Qual dos seguintes pontos pertence a esse gráfico?

- 1) $(0, 20\,000)$ 2) $(10, 20\,000)$ 3) $(15, 16\,500)$ 4) $(15, 15\,000)$ 5) $(25, 15\,000)$

Questão 41 Observe, na figura da questão 38, o **gráfico** representado pela linha pontilhada que contém os pontos R e S . Qual dos seguintes pontos pertence a esse gráfico?

- 1) $(0, 10\,000)$ 2) $(5, 9\,000)$ 3) $(15, 8\,000)$ 4) $(15, 7\,500)$ 5) $(25, 6\,000)$

Questão 42 Trace, na figura da questão 38, o gráfico representado por uma linha reta que contenha os pontos $(0, 16\,000)$ e $(30, 11\,000)$.

Questão 43 Trace, na figura da questão 38, a linha reta que corresponde ao gráfico da função afim $y = 1\,000x + 4\,000$.

Questão 44 Trace, na figura da questão 38, a linha reta que corresponde ao gráfico da função afim $y = -4\,000x + 20\,000$.

Observação 0.7 A linha contínua que contém os pontos P e Q na figura da questão 38 é parte do gráfico que representa a **função afim**

$$y = ax + b, \quad (7)$$

cujos **coeficientes** são dados por $a = -300$ e $b = 21\,000$. Logo, a função afim representada por esse gráfico é dada por

$$y = -300x + 21\,000.$$

Vejamos como determinar esses coeficientes. Para tanto, observe, inicialmente, que o ponto P tem coordenadas $(0, 21\,000)$ e o ponto Q tem coordenadas $(30, 12\,000)$. Sendo assim, a variação da variável x do ponto P para o ponto Q é dada por

$$30 - 0$$

e a variação *correspondente* da variável y é dada por

$$12\,000 - 21\,000 = -9\,000.$$

Logo, a **taxa de variação** de y com relação a x é dada pela razão

$$\frac{12\,000 - 21\,000}{30 - 0} = \frac{-9\,000}{30} = -300.$$

Concluimos que o coeficiente a em (7) é igual a taxa de variação, ou seja, $a = -300$.

Quanto ao coeficiente b em (7), observe que esse é o valor da variável y quando $x = 0$, pois

$$y(0) = a \cdot 0 + b = b.$$

No nosso exemplo, temos

$$y(0) = -300 \cdot 0 + b = 21\,000.$$

Observe que $(0, 21\,000)$ são exatamente as coordenadas do ponto P em que o gráfico intersecta o eixo y .

Em resumo, dada uma função afim $y = ax + b$,

- 1) o coeficiente a , denominado **coeficiente angular**, é dado pela **taxa de variação** da função: dados dois pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ no gráfico da função, temos

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

onde

$$y_0 = ax_0 + b,$$

$$y_1 = ax_1 + b.$$

- 2) Já o **coeficiente linear** b é dado pela coordenada (vertical) do ponto em que o gráfico da função

intersecta o eixo y , ou seja, b é o valor da função y quando $x = 0$. Logo, o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico da função.

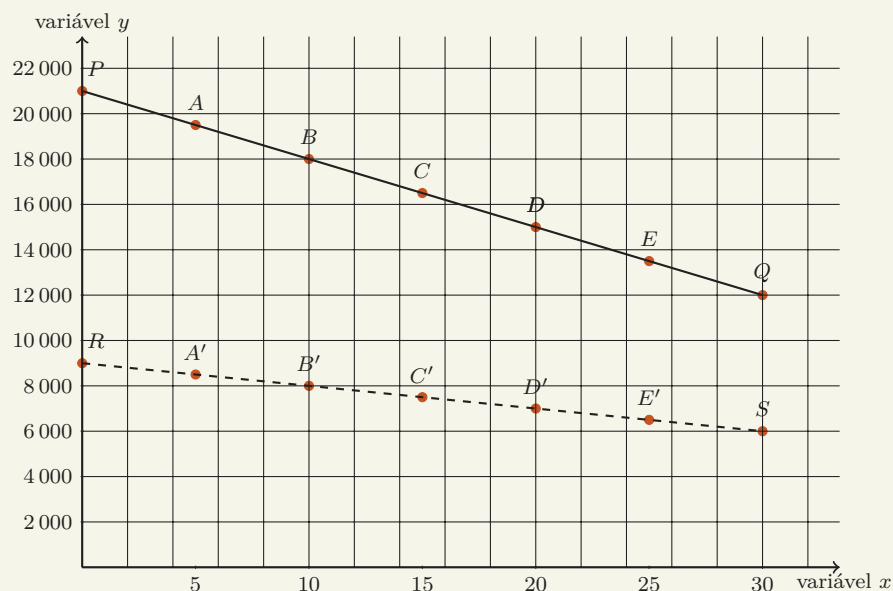
Questão 45 a) Use o plano cartesiano representado na figura da questão 38 para traçar retas que contenham os seguintes pares de pontos:

- i) $(0, 2\,000)$ e $(30, 20\,000)$
- ii) $(10, 0)$ e $(30, 20\,000)$
- iii) $(10, 2\,000)$ e $(30, 20\,000)$
- iv) $(5, 2\,000)$ e $(20, 17\,000)$
- v) $(5, 5\,000)$ e $(25, 15\,000)$

b) Em seguida, determine os coeficientes a e b das funções $y = ax + b$ cujos gráficos são dados pelas retas que você traçou.

c) Por fim, determine qual dessas retas contém o ponto $(20, 10\,000)$.

Questão 46 Observe os seguintes gráficos no plano cartesiano, em que alguns pontos estão destacados.



Determine os seguintes dados:

- 1) A variação da variável x entre os pontos P e B .
- 2) A variação da variável y entre os pontos P e B .
- 3) A taxa de variação de y em relação a x entre os pontos P e B .
- 4) A variação da variável x entre os pontos P e Q .
- 5) A variação da variável y entre os pontos P e Q .
- 6) A taxa de variação de y em relação a x entre os pontos P e Q .
- 7) O coeficiente angular (a) da função cujo gráfico contém os pontos P e Q .
- 8) O coeficiente linear (b) da função cujo gráfico contém os pontos P e Q .
- 9) O valor da variável y quando $x = 7,5$.

Questão 47 Seja $y = ax + b$ a função afim cujo gráfico é dado pela linha que contém os pontos R e S .

- 1) Qual a variação da variável x entre os seguintes pares de pontos: R e S ; R e B' ; B' e S ; C' e D' ; D' e E' ; E' e S ?
- 2) Qual a variação da variável y entre esses pares de pontos?
- 3) Qual o valor da variável y para os seguintes valores de x : $x = 0$, $x = 2,5$, $x = 7,5$ e $x = 12,5$?
- 4) A função cresce ou decresce à medida que x varia de $x = 0$ para $x = 30$?
- 5) Qual a taxa de variação de y em relação a x entre os pontos R e S ?
- 6) Se tomássemos outro par de pontos (por exemplo, R e B' ou B' e S), a taxa de variação seria a mesma ou mudaria? Justifique sua resposta.
- 7) Qual o coeficiente angular (a) na expressão da função $y = ax + b$ cujo gráfico é a linha pontilhada que contém R e S ?
- 8) Qual o coeficiente linear (b) na expressão dessa função?
- 9) Para essa função afim, para qual valor da variável x temos $y = 0$?
- 10) Dada essa função afim, para qual valor de x temos $y = 7\,500$?

Questão 48 Considere os gráficos na figura exposta na questão 46.

- 1) Estendendo as funções $f(x) = -300x + 21\,000$ e $g(x) = -100x + 9\,000$ para valores de x maiores que 30, os seus gráficos se intersectam em algum ponto?
- 2) Qual o valor da coordenada x desse ponto de intersecção, caso exista?
- 3) Qual o valor da coordenada y desse ponto de intersecção, caso exista?

Questão 49 Para qual valor da variável x a diferença entre os valores das funções

$$f(x) = -100x + 9\,000$$

e

$$g(x) = -300x + 21\,000,$$

nessa ordem, é igual a 2 000 unidades?

- A) $x = 0$ B) $x = 7$ C) $x = 50$ D) $x = 70$ E) $x = 2\,000$

Observação 0.8 Nos próximos exercícios, discutiremos **equações lineares** em duas variáveis (x e y , digamos) da forma

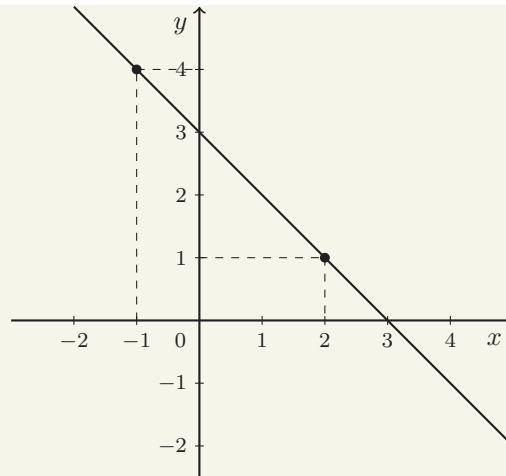
$$Ax + By = C, \quad (8)$$

onde A , B e C são números dados, isto é, são *coeficientes* constantes. Observe que, se $B \neq 0$, podemos reescrever a equação acima pondo y em função de x :

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B},$$

uma **função afim** com coeficiente angular $a = -\frac{A}{B}$. Se $B = 0$ (e $A \neq 0$) na equação (8), essa equação reduz-se a $x = \frac{C}{A}$. Nesse caso, temos uma reta vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto $(C/A, 0)$.

Questão 50 — SPAECE - Item M120935E4, adaptado. Observe abaixo o gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

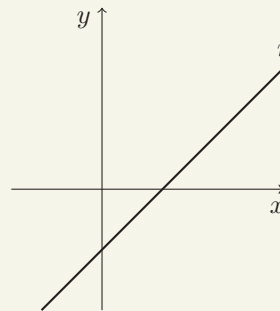


A lei de formação dessa função f é

- A) $y = -3x + 3$ B) $y = -x + 4$ C) $y = -x + 3$ D) $y = 2x + 1$ E) $y = 3x + 3$

Questão 51 Trace, no plano cartesiano representada na questão 50, as retas dadas pelas funções nas alternativas incorretas.

Questão 52 — SPAECE - Item M120881E4. No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico de uma reta r de equação $y = ax + b$.



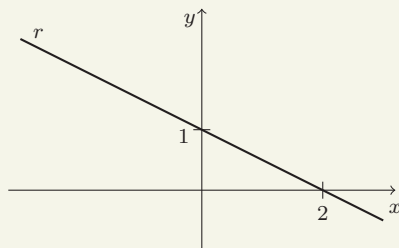
Os valores dos coeficientes angular e linear dessa reta, são, respectivamente,

- A) $a < 0$ e $b < 0$.
B) $a < 0$ e $b > 0$.
C) $a > 0$ e $b > 0$.
D) $a > 0$ e $b < 0$.
E) $a > 0$ e $b = 0$.

Questão 53 Represente, no plano cartesiano, retas que representam os gráficos das seguintes funções:

- 1) $y = 2x + 1$
- 2) $y = 2x - 1$
- 3) $y = -2x + 1$
- 4) $y = -2x - 1$
- 5) $y = \frac{1}{2}x - 2$
- 6) $y = x + \frac{1}{2}$
- 7) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Questão 54 No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico de uma reta r de equação $y = ax + b$.



Os valores dos coeficientes angular e linear dessa reta, são, respectivamente, iguais a

- A) $a = 2$ e $b = 1$. B) $a = 1$ e $b = 2$. C) $a = -1/2$ e $b = 1$. D) $a = 1/2$ e $b = 1$.

Questão 55 a) Trace, no plano cartesiano representado na questão 54, as retas que correspondem às funções nas alternativas erradas.

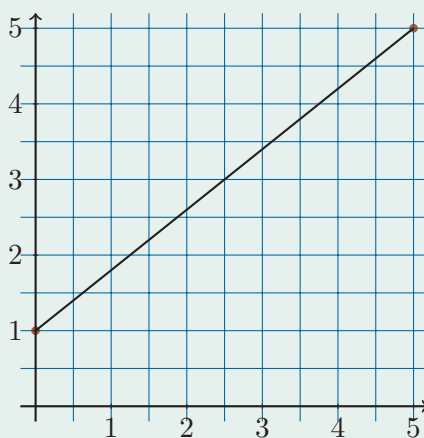
b) O ponto $(1, 1/2)$ pertence a qual dessas retas?

c) O ponto $(-1, 1/2)$ pertence a qual dessas retas?

Observação 0.9 Vejamos exemplos com as diferentes possibilidades de sinais dos coeficientes angular a e linear b em uma função afim da forma

$$y = ax + b.$$

Nos casos em que o coeficiente angular é positivo, isto é, quando $a > 0$, temos inclinação positiva da reta: ou seja, variações positivas de x correspondem a variações positivas de y . Dito de outro modo, se a variável x cresce, a variável y também cresce (proporcionalmente, além disso). No exemplo seguinte, temos $a > 0$ e $b > 0$, visto que, além de inclinado positivamente, o gráfico intersecta o eixo vertical no ponto $(0, b)$ com ordenada positiva.

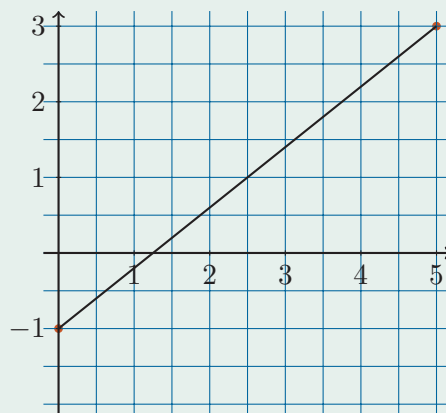


Neste exemplo, temos

$$y = \frac{4}{5}x + 1,$$

ou seja, $a = \frac{4}{5}$ e $b = 1$.

Observação 0.10 No exemplo seguinte, temos $a > 0$ e $b < 0$, ou seja, o gráfico é também positivamente inclinado mas, desta vez, intersecta o eixo vertical em um ponto $(0, b)$ com ordenada negativa:

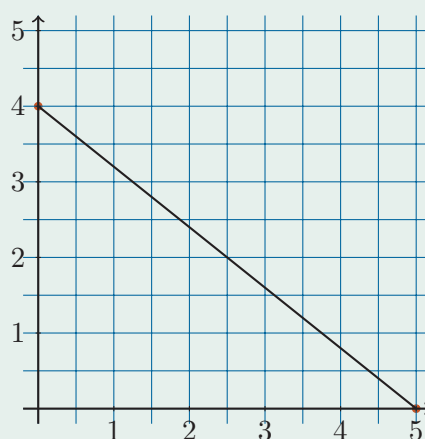


Neste exemplo, temos

$$y = \frac{4}{5}x - 1,$$

ou seja, $a = \frac{4}{5}$ e $b = -1$.

Observação 0.11 No próximo exemplo, o gráfico é *negativamente* inclinado, ou seja, o coeficiente angular a é negativo. Isso significa que, dada uma variação positiva de x , a variação correspondente de y é negativa. Em outros termos, se a variável x cresce, a variável y decresce proporcionalmente. Vejamos, portanto, um exemplo em que $a < 0$ mas $b > 0$, indicando que o gráfico intersecta o eixo vertical em um ponto acima do eixo horizontal:

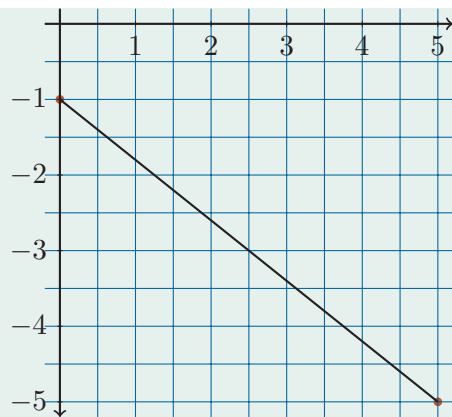


Neste exemplo, temos a função afim dada por

$$y = -\frac{4}{5}x + 4,$$

com $a = -\frac{4}{5}$ e $b = 4$.

Observação 0.12 Finalmente, apresentamos um exemplo de função afim $y = ax + b$ com $a < 0$ (gráfico negativamente inclinado) e $b < 0$ (intersecção do gráfico com o eixo vertical em um ponto *abaixo* do eixo horizontal). Temos:



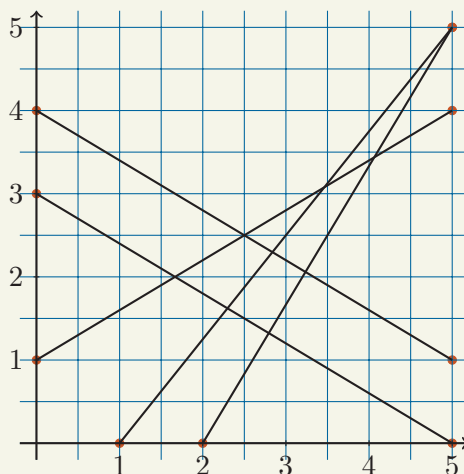
Nesta figura, representamos o gráfico da função afim

$$y = -\frac{4}{5}x - 1$$

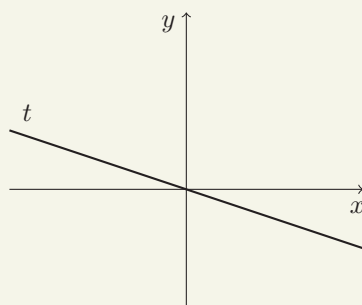
com $a = -\frac{4}{5}$ e $b = -1$. Note que o gráfico é negativamente inclinado ($a < 0$) e intersecta o eixo vertical em um ponto abaixo do eixo horizontal com ordenada negativa $b < 0$.

Questão 56 Indique quais das retas no plano cartesiano representado abaixo são gráficos das funções

- i) $y = -0,6x + 3$ ii) $y = 0,6x + 1$ iii) $y = 1,25x - 1,25$ iv) $y = -0,6x + 4$ v) $y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$



Questão 57 — SPAECE - Item M120881E4. A reta t de equação $y = jx + k$ está representada no gráfico abaixo.



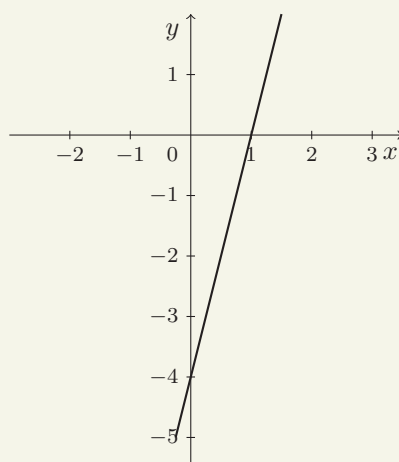
Os coeficientes angular j e linear k , em relação ao sinal, são, respectivamente,

- A) negativo e negativo.
- B) negativo e nulo.
- C) positivo e negativo.
- D) positivo e nulo.
- E) positivo e positivo.

Solução. Observe que o gráfico está *negativamente* inclinado, isto é, dada uma variação *positiva* da variável x , temos que a variação correspondente da variável y é negativa. Portanto, o **coeficiente angular** j é negativo. Em suma, $j < 0$.

Observamos, ainda, que o gráfico intersecta o eixo vertical na origem, isto é, no ponto $(0,0)$. Logo, o **coeficiente linear** k da função afim $y = jx + k$ é nulo, ou seja, $k = 0$. Portanto, a alternativa correta é B). ■

Questão 58 — SAEPE - Item M120460H6. Observe abaixo um esboço do gráfico da função polinomial do 1º grau $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:



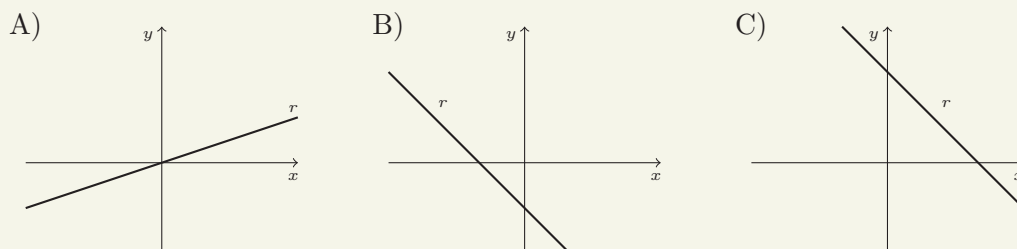
A lei de formação dessa função f é

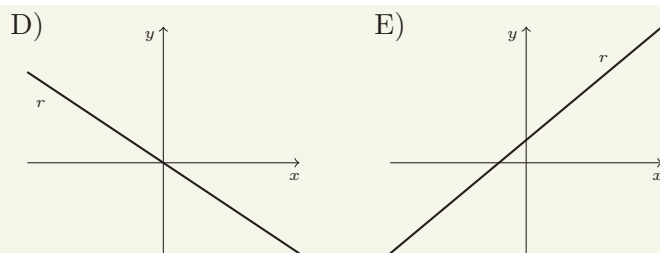
- A) $y = -4x - 4$ B) $y = -4x + 1$ C) $y = -4x + 4$ D) $y = 4x - 4$ E) $y = 4x + 1$

Questão 59 — PAEBES - Item M120180G5, adaptado. Qual é a equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(1, 1)$?

- A) $y = -2x - 3$ B) $y = -2x + 3$ C) $y = -2x + 9$ D) $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ E) $y = 2x + 4$

Questão 60 — SAEPE - Item M120325H6, adaptado. Os coeficientes da equação reduzida de uma reta r são ambos negativos. Qual das retas abaixo pode representar a reta r ?





Questão 61 — SAEPE - Item M120184H6. A reta k passa pelos pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(3, 2)$. Qual é a equação reduzida dessa reta?

- A) $y = -3x - 1$ B) $y = \frac{x}{3} + 1$ C) $y = x + 3$ D) $y = 3x + 1$ E) $y = 3x + 2$

Questão 62 — SAEPE - Item M120414H6. A reta t passa pelos pontos $(4, 8)$ e $(2, -6)$. Qual é a equação dessa reta t ?

- A) $y = 7x - 20$ B) $y = -7x - 52$ C) $y = 6x + 2$ D) $y = 4x + 8$ E) $y = 2x - 6$

Questão 63 — SAEGO - Item M120496A9. A reta s passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(0, -6)$. A equação dessa reta é

- A) $y = -6x + 3$ B) $y = -2x - 6$ C) $y = 2x - 6$ D) $y = 3x - 6$ E) $y = 6x + 3$

Questão 64 — SPAECE - Item M120283H6. Dois pontos pertencentes à reta r são $(-2, 3)$ e $(1, 6)$. Qual é a equação dessa reta?

- A) $y = -3x - 3$ B) $y = -2x + 3$ C) $y = x + 5$ D) $y = x + 6$ E) $y = 2x + 2$

Questão 65 — SPAECE - Item M120703H6. Considere uma reta r que passa pelos pontos de coordenadas $(-2, 3)$ e $(4, -2)$. Uma equação dessa reta r está representada em

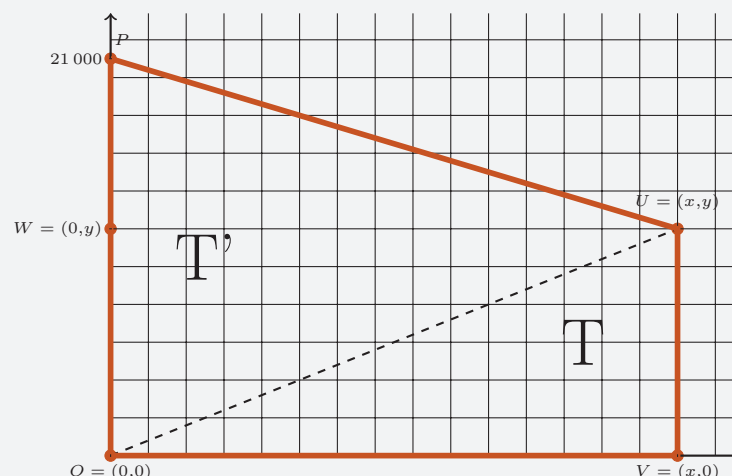
- A) $x + 2y + 16 = 0$
 B) $x + 6y - 16 = 0$
 C) $2x - 3y + 6 = 0$
 D) $5x + 6y - 8 = 0$
 E) $3x + 5y - 3 = 0$

A partir daqui, estudamos funções quadráticas.

Questão 66 Considerando a figura da questão 46, determine as áreas das seguintes figuras:

- 1) A área do trapézio cujos vértices são os pontos P , A , $(5, 0)$ e $(0, 0)$.
- 2) A área do trapézio cujos vértices são os pontos P , B , $(10, 0)$ e $(0, 0)$.
- 3) A área do trapézio cujos vértices são os pontos P , Q , $(30, 0)$ e $(0, 0)$.
- 4) A área do trapézio cujos vértices são os pontos R , S , $(30, 0)$ e $(0, 0)$.
- 5) Se (x, y) é um ponto do gráfico da função $f(x) = -300x + 21\,000$, a área do trapézio cujos vértices são os pontos P , (x, y) , $(x, 0)$ e $(0, 0)$.
- 6) Se (x, y) é um ponto do gráfico da função $g(x) = -100x + 9\,000$, a área do trapézio cujos vértices são os pontos R , (x, y) , $(x, 0)$ e $(0, 0)$.
- 7) A área do quadrilátero cujos vértices são os pontos P , Q , S e R .
- 8) A área do triângulo formado pelos pontos P , R e pelo ponto de intersecção dos dois gráficos.

Note que, se $U = (x, y)$ é um ponto do gráfico da função $y = f(x) = -300x + 21\,000$, o trapézio definido pelos pontos $P = (0, 21\,000)$, $U = (x, y)$, $V = (x, 0)$ e $O = (0, 0)$ pode ser representado na seguinte figura.



A linha pontilhada divide o trapézio em duas partes *disjuntas*, isto é, sem pontos em comum além da própria linha. Uma das partes (T) é um triângulo com base UV e altura OV . A base UV mede y unidades de comprimento e a altura OV mede x unidades de comprimento. Logo, a área de T é dada por

$$\frac{x \cdot y}{2},$$

ao passo que T' é um triângulo com base OP (medindo 21 000 unidades de comprimento) e altura UW (medindo x unidades de comprimento). Assim, a área de T' é igual a

$$\frac{x \cdot 21\,000}{2}.$$

Somando as áreas de T e T' , deduzimos que a área do trapézio é igual a

$$\frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot 21\,000}{2} = x \cdot \frac{y + 21\,000}{2},$$

ou seja, é dada pelo *produto da medida da altura OV (isto é, x) pela média aritmética das medidas das bases UV e OP (respectivamente, y e 21 000)*. Por fim, observe que $U = (x, y)$ é um ponto do gráfico da função f . Portanto, $y = -300x + 21\,000$. Assim, a área do trapézio é dada pela expressão

$$x \cdot \frac{-300x + 21\,000 + 21\,000}{2} = -150x^2 + 21\,000x.$$

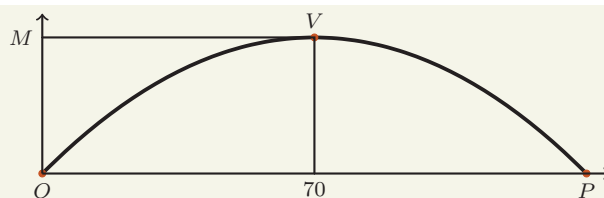
Concluimos que essa área define a **função quadrática**

$$A(x) = -150x^2 + 21\,000x,$$

ou, fatorando-se a expressão algébrica do lado direito,

$$A(x) = 150 \cdot x \cdot (140 - x).$$

Questão 67 A seguinte figura mostra o gráfico da função quadrática $A(x) = -150x^2 + 21\,000x$, onde x varia de 0 a 140.



O ponto $P = (x, 0)$ é um zero da função A . Qual o valor da coordenada x ?

- A) 0 B) 35 C) 140 D) 150

Questão 68 Considere o gráfico da função $A(x) = -150x^2 + 21000x$ na figura da questão 67. O valor dessa função quando $x = 20$ é igual a

- A) 18 000. B) 36 000. C) 180 000. D) 360 000.

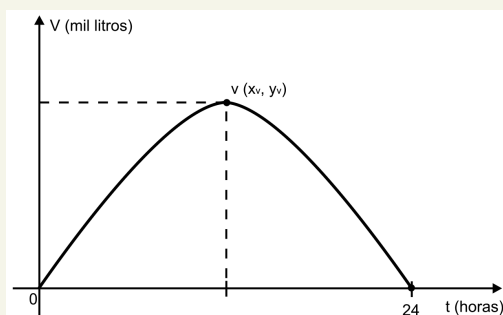
Questão 69 Considere o gráfico da função $A(x) = -150x^2 + 21000x$ na figura da questão 67. Essa função atinge valor máximo M quando $x = 70$. Qual o valor de M ?

- A) 10 500 B) 21 000 C) 140 000 D) 735 000

Questão 70 Considere o gráfico da função $A(x) = -150x^2 + 21000x$ na figura da questão 67. Com respeito a essa função, é correto afirmar que

- A) é crescente no intervalo $[0, 140]$.
B) é crescente no intervalo $[0, 70]$.
C) é decrescente no intervalo $[0, 70]$.
D) é decrescente no intervalo $[0, 140]$.

Questão 71 — SAEPE - Item M100070C2. O volume (V) em um reservatório de água varia em função do tempo (t) em horas, conforme representado no gráfico da função quadrática abaixo.



De acordo com esse gráfico, em quantas horas esse reservatório atinge seu volume máximo?

- A) 6 B) 12 C) 24 D) 144 E) 288

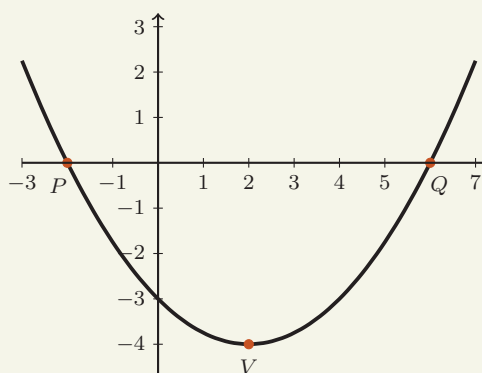
Questão 72 Considere a função, definida para $x \in [0, 24]$, cujo gráfico está representado na questão 71. Responda, então, as seguintes perguntas: a) Quais os zeros da função? b) Em que intervalo essa função é crescente? c) Se o volume máximo é igual a 14 400 litros, qual a expressão algébrica da função?

Solução. a) O gráfico intersecta o eixo horizontal quando $x = 0$ e $x = 24$. Isso significa que a função se anula para esses valores da variável x . b) A função atinge um valor máximo quando

$$x = \frac{0 + 24}{2} = 12,$$

a média aritmética dos zeros da função. Logo, a função é crescente no intervalo $[0, 12]$ e é decrescente no intervalo $[12, 24]$. c) Dados os zeros da função, podemos escrevê-la como $f(x) = ax(x - 24)$. Sabendo que $f(12) = 14\,400$, temos $-a \cdot 12 \cdot 12 = 14\,400$, ou seja, $a = -100$. ■

Questão 73 Na seguinte figura, representamos uma **parábola**, gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida no intervalo $[-3, 7]$.



Responda às seguintes questões.

- 1) Para quais valores da variável x a função f se anula, ou seja, quais são os **zeros** de f ?
- 2) Quais as coordenadas dos pontos P e Q ?
- 3) Em que intervalo a função f é crescente?
- 4) Em que intervalo a função f é decrescente?
- 5) Qual o valor mínimo da função f ?
- 6) Quais as coordenadas do ponto V (o **vértice** da parábola)?
- 7) Quais são os coeficientes a , b e c na expressão algébrica da função f ?
- 8) Para quais valores da variável x temos $f(x) = 2$?
- 9) Escrevendo-se a função f na **forma fatorada** $f(x) = A(x - r)(x - s)$, quais são os valores de A , r e s ?

Na questão 73, lidamos com alguns fatos importantes sobre **funções quadráticas** ou funções polinomiais de segundo grau. Os zeros ou raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores da variável x para os quais $f(x) = 0$. No caso em que f tem dois zeros, digamos, $x = r$ e $x = s$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - r)(x - s) = a(x^2 - rx - sx + rs) \\ &= ax^2 - a(r + s)x + ars. \end{aligned}$$

Portanto $r + s = -b/a$ e $rs = c/a$. Além disso, a função atinge valor máximo (se $a < 0$) ou valor mínimo (se $a > 0$) quando $x = x_V$, onde

$$x_V = \frac{r + s}{2},$$

ou seja, quando x é igual a média aritmética dos zeros da função. Escrevendo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, vemos que os zeros ou raízes de f são dados, no caso em que $\Delta \geq 0$, por

$$r = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad s = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Logo,

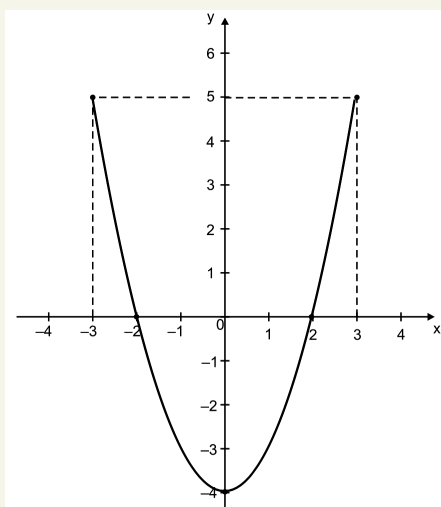
$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

e o valor máximo (ou mínimo) da função f é dado quando

$$y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Sendo assim, o vértice da parábola, gráfico da função f , tem coordenadas $V = (-b/2a, -\Delta/4a)$. Além disso, a reta vertical que passa por V é um eixo de simetria dessa parábola.

Questão 74 — SAEPI - Item M120258ES. O gráfico abaixo representa uma função de domínio $[-3, 3]$.



As raízes dessa função são

- A) $-2, -4$ e 2 . B) -2 e -4 . C) -2 e 2 . D) $-2, 0$ e 2 . E) -4 e 0 .

Questão 75 — PUC-RS, 2019. O goleiro de um time de futebol deu um chute, e a bola realizou uma trajetória que pode ser modelada pela expressão $S(t) = at^2 + bt + c$, sendo S a altura alcançada pela bola e medida em metros (m) e t o tempo medido em segundos (s). Se $S(3) = S(6)$, então a bola atingiu sua altura máxima em

- A) $6,0$ s B) $5,5$ s C) $4,5$ s D) $4,0$ s

Solução. Uma solução simples consiste em observar que, como $S(3) = S(6) = d$, para uma certa constante d , a função modificada $H(t) = S(t) - d = at^2 + bt + c - d$ tem zeros em $t = 3$ e em $t = 6$. Logo, o valor máximo dessa função (e, portanto, da função S) ocorre no ponto médio entre os zeros, ou

seja, ocorre quando

$$t = \frac{3+6}{2} = 4,5$$

segundos, o que corresponde à alternativa C).

Questão 76 — UNICHRISTUS 2018. Uma empresa que comercializa diversos tipos de chocolate fez um levantamento e detectou que o valor diário arrecadado para vender suas barras de chocolate especial (com uma textura mais cremosa) é dado pela função $V(x) = 18x - 0,6x^2$, em que $V(x)$ é o valor diário, em reais, arrecadado com a venda das barras de chocolate especial e x é o número de barras de chocolate especial que foram vendidas em um dia. Para que o valor diário arrecadado seja máximo, o número de barras de chocolate especial que devem ser vendidas em um dia deve ser igual a

- A) 10. B) 12. C) 15. D) 18. E) 20.

Questão 77 — ENEM 2016, Caderno Azul, Questão 157, adaptada. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(x) = -2x^2 + 120x$ (em que x é expresso em dia e $x = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

- A) 19º dia. B) 20º dia. C) 29º dia. D) 30º dia. E) 60º dia.

Seção 3. Terceiro percurso: porcentagens, proporções, progressões e gráficos

As tarefas a seguir envolvem conhecimentos prévios fundamentais para desenvolver as habilidades nos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB (terceira série do Ensino Médio):

- D16 - Resolver problema que envolva porcentagem.
- D15 - Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas, entre grandezas.
- D34 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D28 - Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial de 1º grau.
- D19 - Resolver situação problema envolvendo uma função de primeiro grau.
- D22 - Resolver problema envolvendo PA/PG, dada a fórmula do termo geral.
- D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

Questão 78 — PAEBES - Item M080552E4. Uma confecção produziu 400 biquínis. Desses biquínis, 50 estão com defeitos. Qual é a porcentagem do total de biquínis produzidos que apresentou defeitos?

- A) 8% B) 12,5% C) 50% D) 87,5%

Questão 79 — SAEPE - Item M110097H6. Uma empresa aérea realizou uma pesquisa entre seus clientes para saber quais eram os seus destinos preferidos. Dos 300 clientes entrevistados, 40% optaram pela Irlanda. Quantos clientes entrevistados preferem a Irlanda como destino?

- A) 12 B) 40 C) 120 D) 180 E) 260

Questão 80 — SAEPI - Item 120465ES. A prefeitura de uma cidade adotou a seguinte promoção para incentivar a arrecadação de IPTU (Imposto Predial Territorial Urbano): “pague com 10% de desconto até o dia 10 de maio; preço normal de 11 a 31 de maio ou acréscimo de 10% após o dia 1º de junho”. Carla recebeu seu carnê antecipadamente com o preço normal de R\$ 350,00 e pagou no dia 10 de junho. Quanto Carla pagou de IPTU?

- A) R\$ 385,00 B) R\$ 360,00 C) R\$ 350,00 D) R\$ 340,00 E) R\$ 315,00

Questão 81 — SAEPI - Item M090129C2. Em uma determinada cidade de 100 000 habitantes apenas $\frac{1}{5}$ da população recebeu a vacina contra a gripe A (H1N1) no ano de 2011. Esse número de habitantes vacinados representa que percentual do total de habitantes dessa cidade?

- A) 1% B) 1,5% C) 5% D) 20%

Questão 82 — SAEPI - Item M090579ES. Em um teatro, o valor do ingresso é R\$ 60,00. No dia internacional das mulheres, o ingresso feminino nesse teatro teve um desconto de 15%. Qual foi o valor do ingresso feminino desse teatro nesse dia?

- A) R\$ 9,00 B) R\$ 15,00 C) R\$ 45,00 D) R\$ 51,00

Questão 83 — SAEPI - Item M120258A8. O salário de Ricardo era de R\$ 400,00 e agora é de R\$ 460,00. Ele recebeu um aumento de

- A) 60% B) 50% C) 15% D) 13% E) 10%

Questão 84 — UECE 2022.1, Segunda Fase. Desejando pintar uma superfície retangular cujas dimensões são 15 m de comprimento e 3,2 m de largura, ao comprar a tinta, verifiquei que uma lata da tinta de minha escolha custa R\$ 12,00 e que, com uma lata de tinta, posso pintar apenas 2,0 m² da superfície. Se disponho de apenas R\$ 180,00 para comprar tinta, a porcentagem da superfície que posso pintar é

- A) 66,0% B) 58,0% C) 65,5% D) 62,5%

 **Solução.** Essa é uma questão interessante por combinar cálculos de áreas e de porcentagens. Uma vez que a superfície é retangular, sua área é dada pelo produto

$$15 \cdot 3,2 = 60 \cdot 0,8 = 48 \text{ m}^2.$$

Para pintar essa área superficial, são necessárias, portanto,

$$\frac{48}{2} = 24$$

latas de tinta, que representam um custo de

$$24 \cdot 12 = 144 \cdot 2 = 288$$

reais. Portanto, com 180 reais, é possível pintar, nessa mesma proporção de tinta por área,

$$\frac{180}{288} = \frac{180 : 36}{288 : 36} = \frac{5}{8},$$

ou seja,

$$\frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000} = 62,5\%$$

o que corresponde à alternativa D).

Questão 85 — SAEPE - Item M120442H6. Uma lanchonete vende sucos em copos com capacidade para 500 mL pelo preço de R\$ 5,00. Atendendo aos pedidos de clientes, essa lanchonete também passará a vender seus sucos em copos que comportam 200 mL a mais do que o modelo atual, e o preço desse novo copo de suco será proporcional ao preço do suco vendido no copo de 500 mL.

De acordo com essas informações, por qual valor essa lanchonete deve vender esse novo copo de suco?

- A) R\$ 2,00 B) R\$ 3,57 C) R\$ 5,00 D) R\$ 6,25 E) R\$ 7,00

Questão 86 — SAEPI - Item M100276E4. Para retirar o entulho de um terreno, 8 máquinas iguais retiram um total de 24 toneladas de entulho por dia. Para agilizar o trabalho, foram acrescentadas mais 4 máquinas iguais às anteriores.

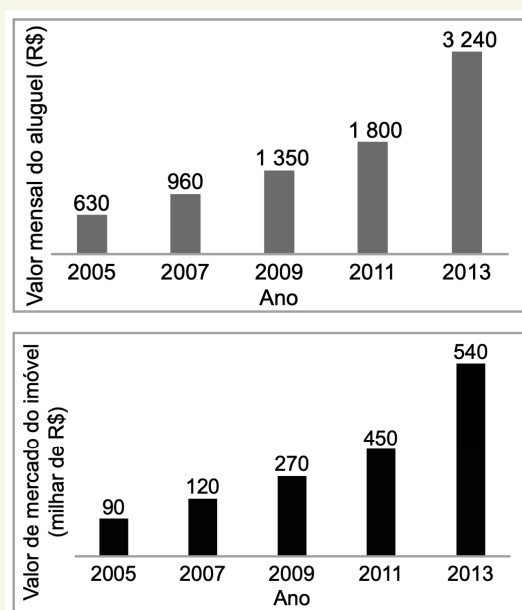
Com todas essas máquinas trabalhando ao mesmo tempo, quantas toneladas de entulho serão retiradas por dia desse terreno?

- A) 16 B) 28 C) 32 D) 36 E) 48

Questão 87 Um reservatório tem capacidade para 2 400 litros. Quando está com 800 litros, uma torneira é aberta e despeja na caixa 20 litros por minuto. O tempo que transcorre do momento em que a torneira é aberta até o enchimento total da caixa é

- A) 160 min. B) 120 min. C) 80 min. D) 60 min. E) 40 min.

Questão 88 — ENEM 2022, Caderno Amarelo, Questão 143. No período de 2005 a 2013, o valor de venda dos imóveis em uma cidade apresentou alta, o que resultou no aumento dos aluguéis. Os gráficos apresentam a evolução desses valores, para um mesmo imóvel, no mercado imobiliário dessa cidade.



A rentabilidade do aluguel de um imóvel é calculada pela razão entre o valor mensal de aluguel e o valor de mercado desse imóvel.

Com base nos dados fornecidos, em que ano a rentabilidade do aluguel foi maior?

- A) 2005 B) 2007 C) 2009 D) 2011 E) 2013

Questão 89 — ENEM 2020, Caderno Amarelo, Questão 174. O quadro representa os gastos mensais, em real, de uma família com internet, mensalidade escolar e mesada do filho.

Internet	Mensalidade escolar	Mesada do filho
120	700	400

No início do ano, a internet e a mensalidade escolar tiveram acréscimos, respectivamente, de 20% e 10%. Necessitando manter o valor da despesa mensal total com os itens citados, a família reduzirá a mesada do filho. Qual será a porcentagem da redução da mesada?

- A) 15,0 % B) 23,5 % C) 30,0 % D) 70,0 % E) 76,5 %

Questão 90 — ENEM 2022, Caderno Amarelo, Questão 149. Em janeiro de 2013, foram declaradas 1 794 272 admissões e 1 765 372 desligamentos no Brasil, ou seja, foram criadas 28 900 vagas de emprego, segundo dados do Cadastro Geral de Empregados e Desempregados (Caged), divulgados pelo Ministério do Trabalho e Emprego (MTE). Segundo o Caged, o número de vagas criadas em janeiro de 2013 sofreu uma queda de 75%, quando comparado com o mesmo período de 2012.

Disponível em: <http://portal.mte.gov.br>. Acesso em: 23 fev. 2013 (adaptado)

De acordo com as informações dadas, o número de vagas criadas em janeiro de 2012 foi

- A) 16 514. B) 86 700. C) 115 600. D) 441 343. E) 448 568.

Questão 91 Uma pesquisa sobre jogos eletrônicos mostrou que, num grupo de 1 000 jovens de 13 a 19 anos, 80% jogam em plataformas na *internet* e, dentre esses, 45% jogam em grupos. Qual a quantidade de jovens nesse grupo que jogam sozinhos?

- A) 800 B) 550 C) 440 D) 360 E) 350

Questão 92 — UNICAMP 2023, Primeira Fase, questão 45. Um recipiente de 30 litros contém uma solução de 14 partes de álcool e 1 parte de água. Quantos litros de água devem ser adicionados para que se tenha uma solução com 70% de álcool?

- A) 8 litros. B) 10 litros. C) 12 litros. D) 14 litros.

Questão 93 — SAEPI - Item M120046ES. Em uma editora, o custo de produção de um livro é composto por uma parcela fixa de R\$ 10,00, acrescido de R\$ 0,15 por página. Qual é o custo de produção de um livro de 200 páginas nessa editora?

- A) R\$ 30,00 B) R\$ 40,00 C) R\$ 300,00 D) R\$ 2 000,00 E) R\$ 2 030,00

Questão 94 — UECE 2023.2, Segunda Fase, adaptado. Um equipamento eletrônico utilizado por uma indústria tem seu valor monetário continuamente reduzido em função do uso e do surgimento de novas tecnologias, dentre outros fatores. Se o valor monetário do equipamento decresce linearmente com o tempo, sabendo-se que foi adquirido há três anos pelo valor de R\$ 180 000,00 e que hoje está avaliado em R\$ 135 000,00, é correto afirmar que o valor monetário do equipamento daqui a dois anos será

- A) R\$ 105 000,00. B) R\$ 115 000,00. C) R\$ 108 000,00. D) R\$ 112 000,00.

Questão 95 — SAEPE - Item M120014ES. Uma empresa de arquitetura paga o salário de seus funcionários de acordo com a função apresentada no quadro abaixo.

$$y = 2\,230 + 1\,100x$$

Nessa função, y representa o salário mensal pago pela empresa de arquitetura ao profissional e x é o número de projetos desse funcionário que foram aprovados no mês. Qual foi o salário de um profissional que teve 3 de seus projetos aprovados em um mês?

- A) R\$ 2 230,00 B) R\$ 3 200,00 C) R\$ 3 330,00 D) R\$ 5 530,00 E) R\$ 9 990,00

Questão 96 — SAEPI - Item M120011EX. A Copa do Mundo de Futebol é um torneio realizado a cada 4 anos. A sequência abaixo relaciona os anos em que houve a Copa do Mundo desde a conquista do primeiro título brasileiro em 1958.

(1958, 1962, 1966, 1970, ...)

Quantos torneios foram realizados de 1958 até 2014?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 56 E) 60

Questão 97 — ENEM 2011, Caderno 6, Questão 159, adaptada. O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- A) 38 000 B) 40 500 C) 41 000 D) 42 000 E) 48 000

Questão 98 — FGV 2015. A que taxa mensal de juros um capital deve ser aplicado a juros simples, durante 250 meses, para que quadruplique?

- A) 1,4% B) 1,5% C) 1,3% D) 1,6% E) 1,2%

Questão 99 — SAEPE - Item M110370H6, adaptado. Em março de 2017, Taís começou a trabalhar como manicure e comprou 8 vidros de esmalte. Após isso, a cada mês, ela comprou 2 vidros de esmalte a mais do que havia comprado no mês anterior. Em agosto de 2017, o preço de cada vidro de esmalte era R\$ 3,75. A quantia gasta por Taís, em agosto de 2017, na compra desses vidros de esmalte foi

- A) R\$ 37,50. B) R\$ 45,00. C) R\$ 52,50. D) R\$ 67,50. E) R\$ 75,00.

Questão 100 — SAEPE - Item M120382H6. Cláudia foi a um teatro e observou que a distribuição das cadeiras para a plateia foi feita da seguinte maneira: a primeira fileira, a mais próxima ao palco, possui 6 assentos, a segunda fileira, 8 assentos e assim sucessivamente, de forma que as quantidades de assentos em cada fileira seguem uma progressão aritmética. Cláudia sentou-se em uma cadeira da última fileira dessa plateia, a qual continha 26 assentos. De acordo com essa distribuição, a quantidade total de cadeiras para a plateia nesse teatro era de

- A) 11. B) 40. C) 70. D) 176. E) 289.

Questão 101 — SAEPE - Item M120241G5. Em um parque de diversões cobra-se R\$ 12,00 de ingresso para entrada no parque mais um valor de R\$ 1,50 cada vez que o brinquedo for utilizado, conforme representado na tabela abaixo.

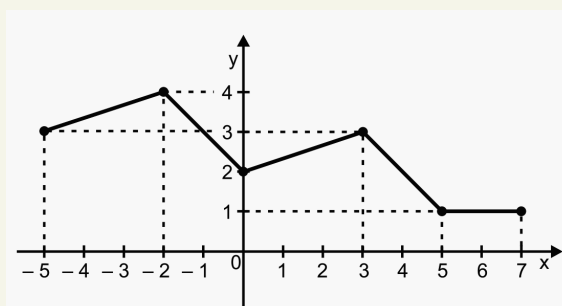
Quantidade de brinquedos utilizados	Preço a ser pago (em reais)
0	12,00
1	13,50
2	15,00
3	16,50
...	...
10	27,00

A função que melhor expressa a relação entre o valor total a ser pago (P) e o número de vezes (n) em que os brinquedos foram utilizados é

- A) $P = 12,00n$.
- B) $P = 12,00n + 1,50$.
- C) $P = 12,00 + 1,50n$.
- D) $P = 1,50n$.
- E) $P = 13,50n$.

Nesta próxima sequência, estudaremos o comportamento do gráfico de funções: os intervalos em que uma função cresce (ou decresce), os pontos em que essa função se anula (os zeros da função, que ocorrem quando o gráfico da função intersecta o eixo x) e pontos de máximo (ou de mínimo) da função, quando existirem.

Questão 102 — SAEPE - Item M100098H6, adaptado. Observe abaixo o gráfico de uma função real, definida no intervalo $[-5, 7]$.

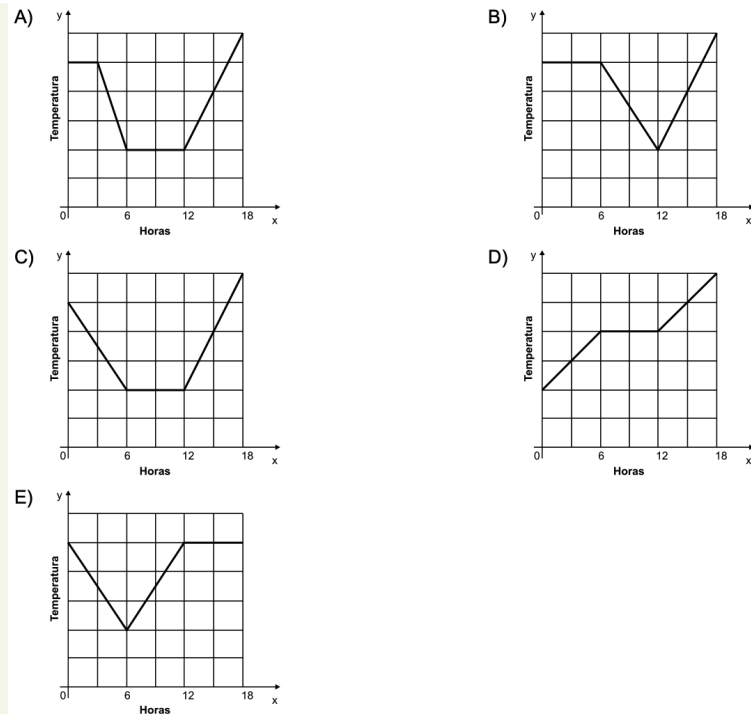


Essa função é estritamente decrescente

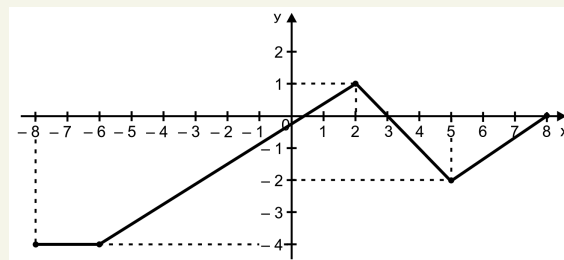
- A) no intervalo $[-5, 2]$ e no intervalo $[0, 3]$.
- B) no intervalo $[-5, 0]$.
- C) no intervalo $[-2, 0]$ e no intervalo $[3, 5]$.
- D) no intervalo $[1, 4]$.
- E) no intervalo $[5, 7]$.

Questão 103 Determine a expressão algébrica da função da questão 102, quando restrita aos intervalos $[-5, -2]$, $[-2, 0]$, $[0, 3]$, $[3, 5]$ e $[5, 7]$.

Questão 104 — SAEPE - Item M100344ES. A previsão do tempo para uma cidade brasileira foi noticiada da seguinte maneira: “Durante a madrugada a temperatura diminuiu, permanecendo constante pela manhã, mas aumentou no período da tarde”. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a situação descrita nesse texto?



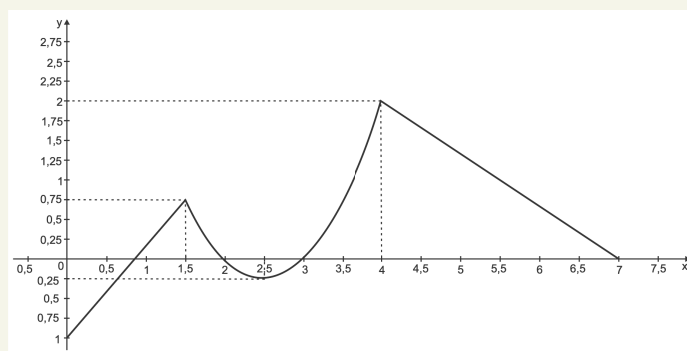
Questão 105 — PAEBES - Item M110087E4. Observe abaixo o gráfico de uma função $y = f(x)$ definida no intervalo $[-8, 8]$.



Essa função é decrescente no intervalo

- A) $]2, 5[$ B) $] - 2, 1[$ C) $] - 4, 1[$ D) $] - 6, 2[$ E) $] - 8, -6[$

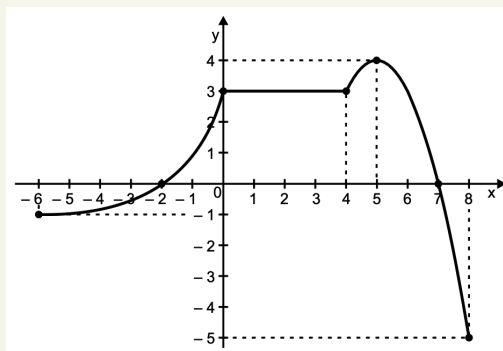
Questão 106 — SAEPI - Item M120982E4, adaptado. Observe abaixo o gráfico de uma função real, definida no intervalo $[0, 7]$.



Essa função é decrescente em

- A) $(-0,25, 0,75)$.
- B) $(0; 7)$.
- C) $(0, 1,5) \cup (2,5; 4)$.
- D) $(1,5; 2,5) \cup (4,7]$.
- E) $(1,5; 4)$.

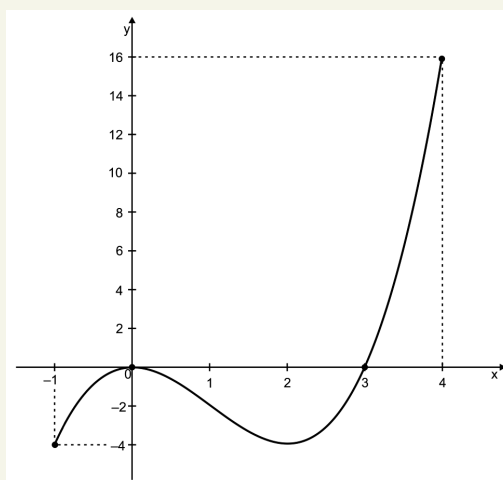
Questão 107 — PAEBES - Item M120612H6. Observe abaixo o gráfico da função $f : [-6, 8] \rightarrow [-5, 4]$.



A função f é estritamente crescente

- A) no intervalo $[5, 8]$.
- B) no intervalo $[0, 4]$.
- C) no intervalo $[-2, 7]$.
- D) no intervalo $[-6, 0]$ e no intervalo $[4, 5]$.
- E) no intervalo $[-6, -2]$ e no intervalo $[7, 8]$.

Questão 108 — SAEGO - Item M100100H6. Observe abaixo o gráfico de uma função real definida no intervalo $[-1, 4]$.

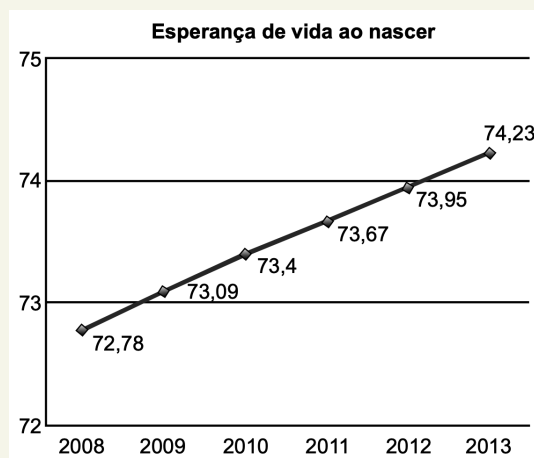


Quais são os zeros dessa função

- A) -4 e 16 .
- B) $-1, 0$ e 4 .
- C) -1 e 4 .

- D) 0 e 3.
E) 4 e 16,

Questão 109 — ENEM 2022, Caderno Amarelo, Questão 164. A esperança de vida ao nascer é o número médio de anos que um indivíduo tende a viver a partir de seu nascimento, considerando dados da população. No Brasil, esse número vem aumentando consideravelmente, como mostra o gráfico.



Pode-se observar que a esperança de vida ao nascer em 2012 foi exatamente a média das registradas nos anos de 2011 e 2013. Suponha que esse fato também ocorreu com a esperança de vida ao nascer em 2013, em relação às esperanças de vida de 2012 e de 2014.

Caso a suposição feita tenha sido confirmada, a esperança de vida ao nascer no Brasil no ano de 2014 terá sido, em ano, igual a

- A) 74,23 B) 74,51 C) 75,07 D) 75,23 E) 78,49

As próximas atividades trabalham conhecimentos e habilidades relativas aos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB (terceira série do Ensino Médio):

- D29 - Resolver problema que envolva função exponencial.
- D27 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- D28 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

Questão 110 Os cientistas usam modelos matemáticos para estudar como uma doença causada por vírus se espalha em uma população, usando dados sobre contágio. Em um modelo bastante simples, suponhamos que o número de pessoas contagiadas dobra a cada cinco dias. Sendo assim, havendo 512 contagiados em um dado dia, quantos haverá 20 dias depois?

- A) 2 048 B) 2 560 C) 4 096 D) 8 192 E) 10 240

Questão 111 Marcos solicitou, em março de 2022, financiamento de R\$ 2 000, a uma taxa de juros compostos de 10% ao mês, aplicada pela administradora do seu cartão de crédito. Caso realize o pagamento 2 meses após o financiamento, isto é, em maio de 2022, o valor a ser pago por Marcos é igual a

- A) R\$ 2 420. B) R\$ 2 400. C) R\$ 2 040. D) R\$ 2 020.

Questão 112 Marcos (veja o enunciado da questão 111) gostaria de calcular quanto deveria pagar à administradora do cartão de crédito, caso pudesse realizar o pagamento da dívida apenas 3 meses após a solicitação do financiamento com taxa de juros compostos de 10% ao mês. Qual das seguintes expressões matemáticas ele deve usar para fazer esse cálculo?

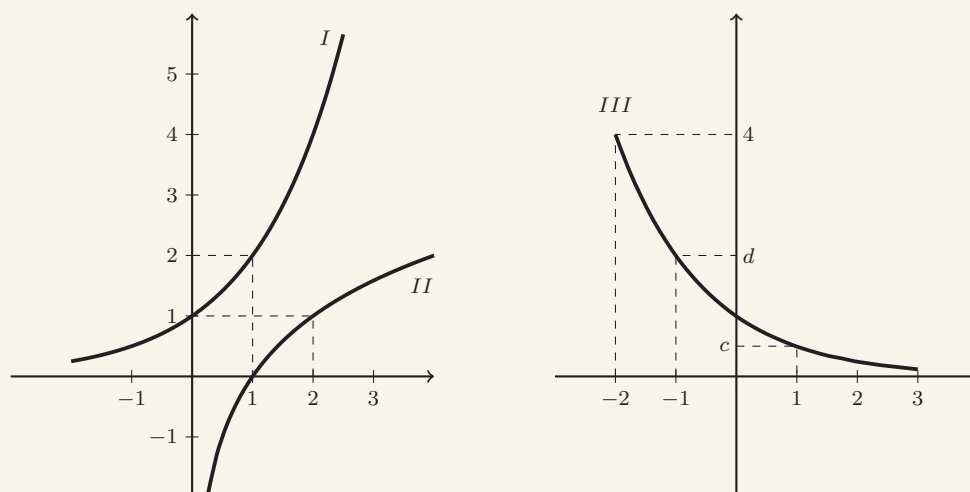
- A) $2000 \cdot 3,3$ B) $2000 \cdot 1,1^3$ C) $2000 \cdot 0,1^3$ D) $2000 \cdot 1,3$

Questão 113 — SAEPI - Item M120282H6. Em determinado período, um pecuarista constatou que a população P , em milhares, de caprinos e ovinos da empresa onde atuava variava de acordo com a função $P(t) = \frac{1}{4} \cdot 2^t$, em que t representa o tempo, em anos, a partir do início do registro dessa população.

Depois de 6 anos do início desse registro, a população, em milhares, de caprinos e ovinos será de

- A) 2. B) 3. C) 9. D) 12. E) 16.

Questão 114 Observe os gráficos nas seguintes figuras e faça as atividades sugeridas nesta questão e na próxima.



- O gráfico I representa a função $f(x) = a^x$. Determine o valor de a .
- Os pontos $(-1, y_0)$ e $(2, y_1)$ pertencem ao gráfico I. Determine o valor de $y_1 - y_0$.
- O gráfico II representa a função $g(x) = \log_b x$. Determine o valor de b .
- Calcule $g(1/4)$ e $g(4)$. Calcule $f(-2)$ e $f(2)$.
- Mostre que $f(x+1) = 2f(x)$, para todo x real. Conclua que $f(x) = 2^x$.
- Mostre que $g(xx') = g(x) + g(x')$, para quaisquer números reais x, x' positivos.

Questão 115 Observe o gráfico III na figura da questão 114 e faça as seguintes atividades.

- O gráfico III representa a função $h(x) = A^x$. Determine o valor de A .
- Calcule $h(-3)$ e $h(3)$.
- Os pontos $(-1, d)$ e $(1, c)$ pertencem ao gráfico III. Qual o valor de $d - c$?
- Para qual valor de x devemos ter $h(x) = 1/16$?
- Para qual valor de x devemos ter $h(x) = 16$?
- Mostre que $h(x+x') = h(x)h(x')$, para quaisquer números reais x, x' .

Seção 4. Quarto percurso: leitura e interpretação de gráficos e tabelas

As tarefas a seguir envolvem conhecimentos prévios fundamentais para desenvolver as habilidades nos seguintes descritores da Matriz de Referência do SAEB (terceira série do Ensino Médio):

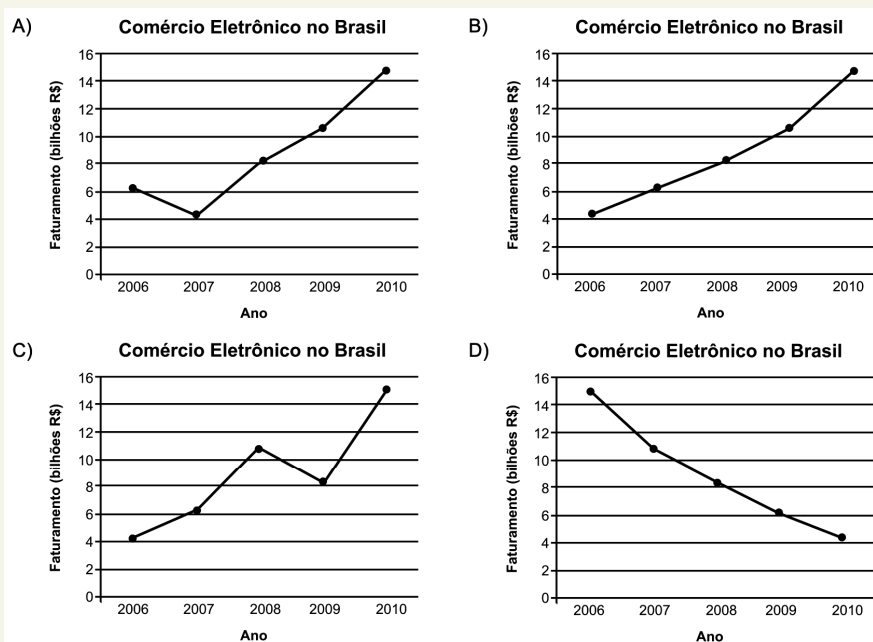
- D34 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
- D35 - Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.
- D16 - Resolver problema que envolva porcentagem.
- D33 - Calcular a probabilidade de um evento.

Questão 116 — SAEPE - Item M090067ES. Observe na tabela abaixo o valor faturado com as compras realizadas pela internet no Brasil no período de 2006 a 2010.

Ano	Faturamento (em reais)
2006	4,4 bilhões
2007	6,3 bilhões
2008	8,2 bilhões
2009	10,6 bilhões
2010	14,8 bilhões

Disponível em: [Fonte: www.e-commerce.org.br](http://www.e-commerce.org.br).

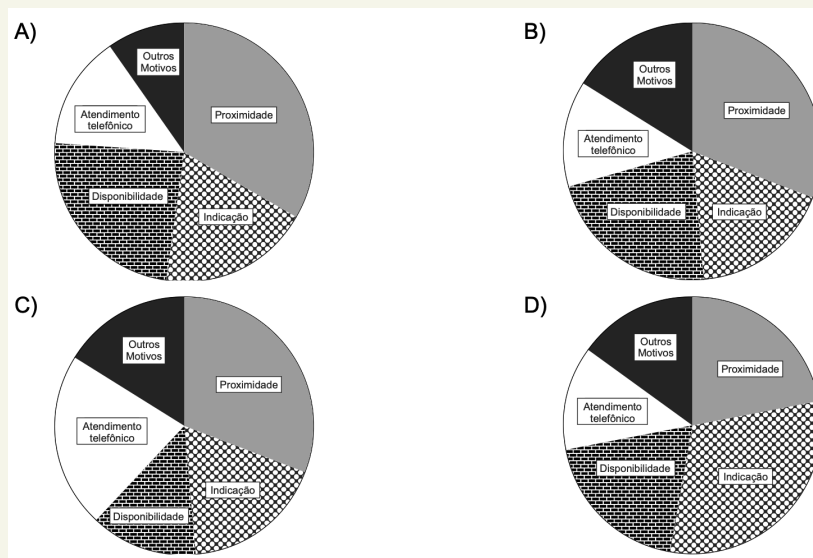
O gráfico que melhor representa os dados dessa tabela é



Questão 117 — SAEPE - Item M100079A9. Um grupo de pessoas respondeu a uma pesquisa sobre a forma de escolha de seus médicos. As respostas obtidas foram registradas no quadro a seguir.

Como você escolhe seu médico?	
Motivos	Porcentagem
Proximidade	22%
Indicação	31%
Disponibilidade	19%
Atendimento telefônico	13%
Outros motivos	15%

De acordo com os dados desse quadro, o gráfico que melhor representa essas informações é



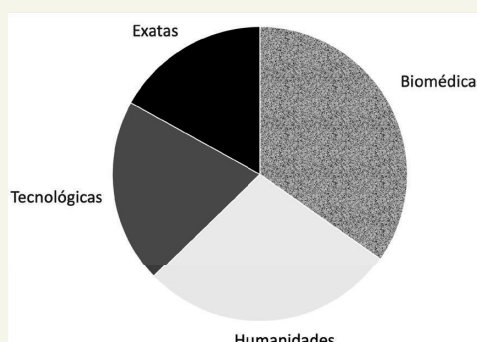
Questão 118 — SPAECE, Item M120976E4. O dono de uma locadora fez uma pesquisa para saber a quantidade de filmes que os clientes alugam por mês. Os resultados dessa pesquisa estão representados na tabela abaixo.

QUANTIDADE DE FILMES ALUGADOS POR MÊS	QUANTIDADE DE CLIENTES
2 OU MENOS	42
3	35
4	87
5	95
6 OU MAIS	58

De acordo com essa tabela, quantos clientes alugam menos de 5 filmes por mês?

- A) 87 B) 95 C) 164 D) 259 E) 317

Questão 119 A escola realizou uma pesquisa entre os 480 estudantes da terceira série sobre suas escolhas de cursos na universidade. As respostas indicaram cursos em quatro áreas: exatas, tecnológica, biomédica e humanidades, conforme representado no seguinte gráfico de setores.



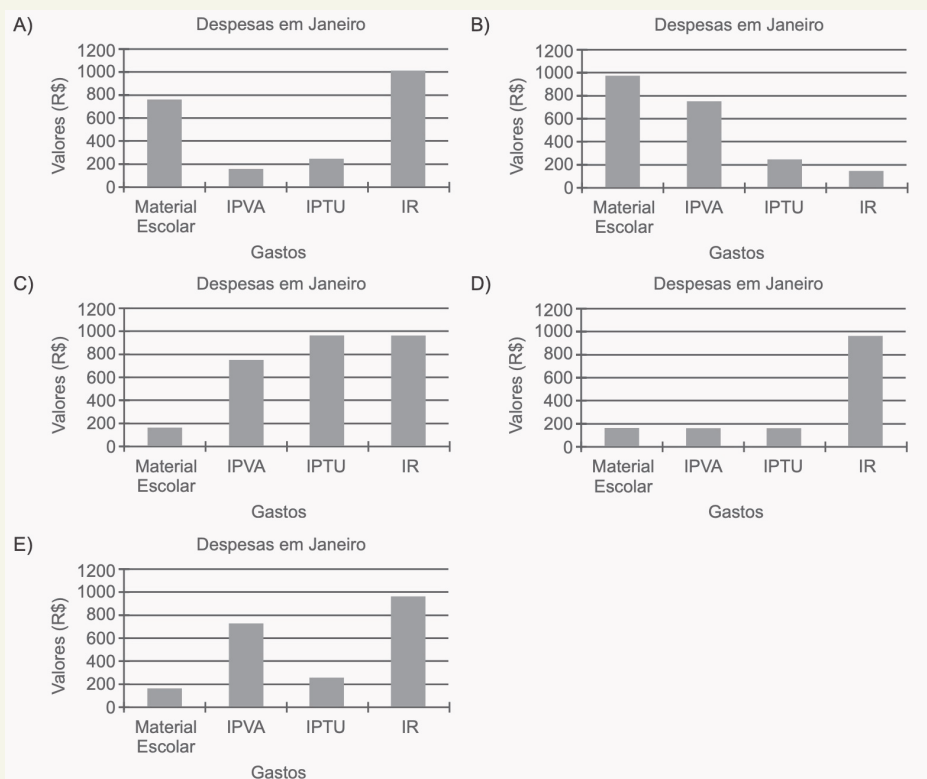
Com base no gráfico, podemos afirmar que

- A) Mais de 50% escolheram cursos na área biomédica.
 B) Cerca de 320 estudantes escolheram cursos na área de humanidades.
 C) Aproximadamente $\frac{1}{3}$ dos estudantes escolheu cursos na área de exatas.
 D) Menos de 33% dos estudantes escolheu cursos na área tecnológica.

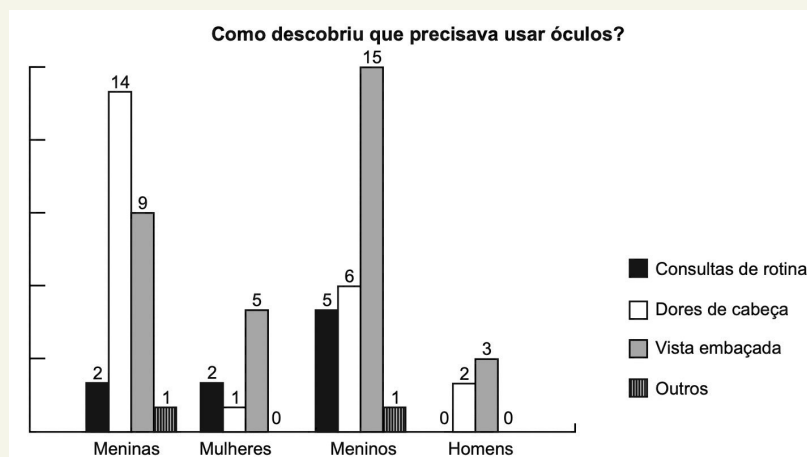
Questão 120 — PAEBES - Item M120169ES, adaptado. João anotou os gastos extras que teve no mês de janeiro em uma tabela, como a representada abaixo.

Despesas	Valor (R\$)
Material escolar	150
IPVA	750
IPTU	245
IR	978

O gráfico que melhor representa os dados dessa tabela é



Questão 121 — SPAECE - Item M100281E4. No gráfico abaixo está representado o resultado de uma pesquisa realizada com um grupo de pessoas para saber de que forma elas descobriram que precisavam do uso de óculos.

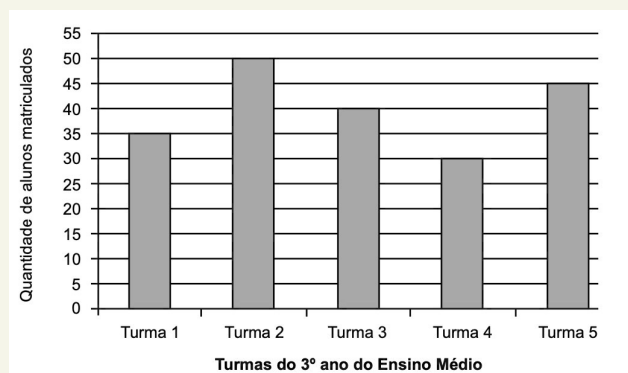


Disponível em: <http://olhosartificiais.blogspot.com.br/p/graficos-e-tabelas.html>. Acesso em: 17 jun. 2013.

De acordo com esse gráfico, a quantidade de pessoas que descobriu que precisava usar óculos por causa da vista embaçada é igual a

- A) 15 B) 18 C) 27 D) 29. E) 32

Questão 122 — SPAECE - Item M120964E4, Adaptado. O gráfico abaixo apresenta a quantidade de alunos matriculados, por turma, no 3º ano do Ensino Médio de uma escola.



A tabela que representa as informações contidas nesse gráfico é

A)

Turmas do 3º ano do Ensino Médio	Quantidade de alunos matriculados
Turma 1	35
Turma 2	50
Turma 3	40
Turma 4	45
Turma 5	30

B)

Turmas do 3º ano do Ensino Médio	Quantidade de alunos matriculados
Turma 1	30
Turma 2	35
Turma 3	40
Turma 4	45
Turma 5	50

C)

Turmas do 3º ano do Ensino Médio	Quantidade de alunos matriculados
Turma 1	50
Turma 2	45
Turma 3	40
Turma 4	35
Turma 5	30

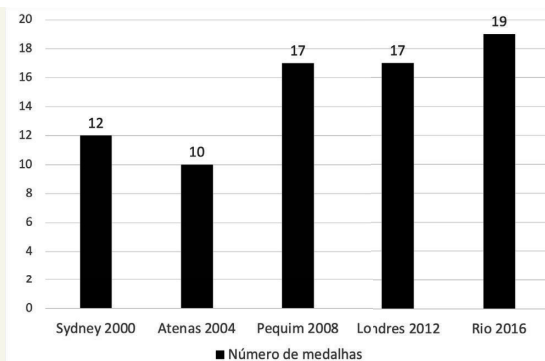
D)

Turmas do 3º ano do Ensino Médio	Quantidade de alunos matriculados
Turma 1	45
Turma 2	30
Turma 3	40
Turma 4	50
Turma 5	35

E)

Turmas do 3º ano do Ensino Médio	Quantidade de alunos matriculados
Turma 1	35
Turma 2	50
Turma 3	40
Turma 4	30
Turma 5	45

Questão 123 O gráfico de colunas seguinte mostra o número de medalhas obtidas pelo Brasil em cinco olimpíadas.



Qual o número médio de medalhas obtidas por Brasil nessas olimpíadas?

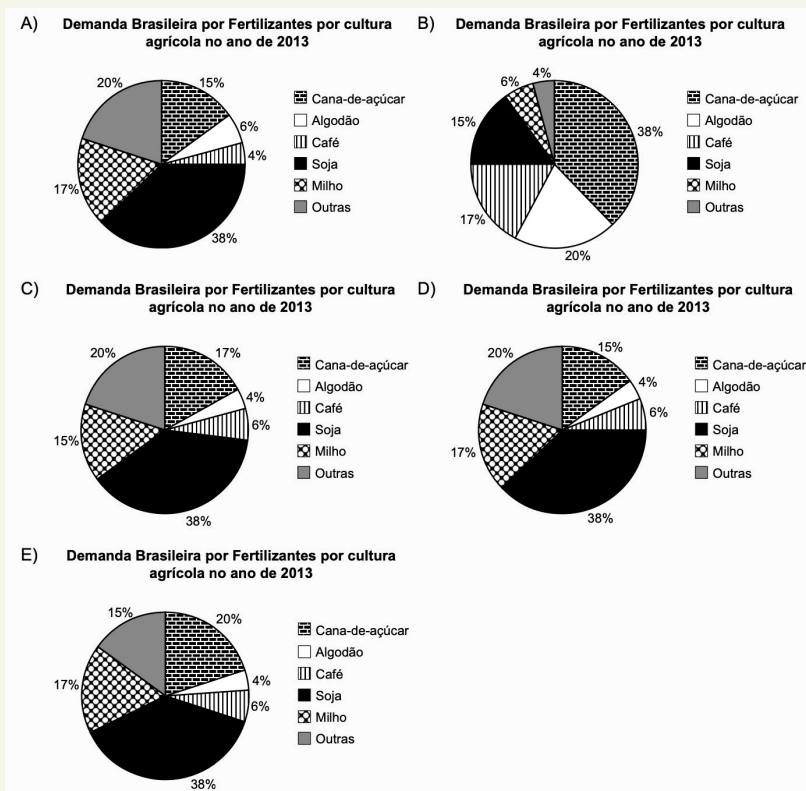
- A) 10 B) 15 C) 17 D) 19 E) 75

Questão 124 — SPAECE - Item M120350H6, adaptado. A tabela abaixo apresenta os percentuais de demanda brasileira por fertilizante, separados por cultura agrícola, no ano de 2013.

Cultura agrícola	Fertilizante demandado
Cana-de-açúcar	15%
Algodão	4%
Café	6%
Soja	38%
Milho	17%
Outras	20%

Disponível em: <http://ruralcentro.uol.com.br/analises/uso-de-fertilizantes-no-brasil-por-cultura-agricola-4696> Acesso em: 24 fev. 2017. *Adaptada para fins didáticos.

O gráfico que apresenta a mesma relação entre os dados dessa tabela é



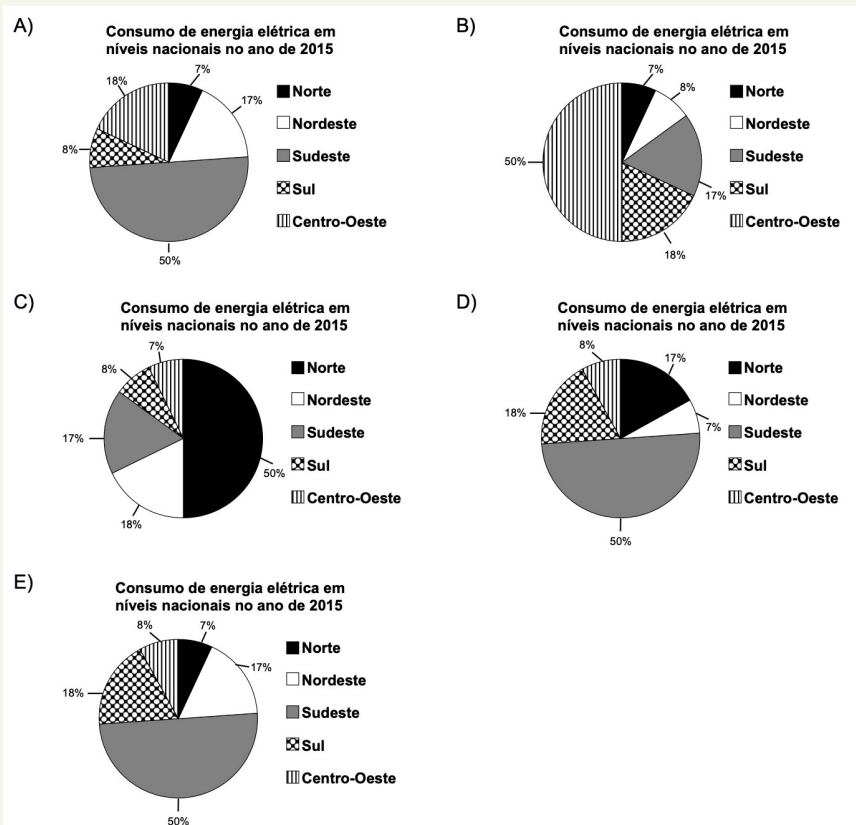
Questão 125 — SAEPE - Item M110241H6, adaptado. A tabela abaixo apresenta o percentual de consumo de energia elétrica em nível nacional, por região geográfica, no ano de 2015.

Consumo de energia elétrica em nível nacional no ano de 2015

Região geográfica	Percentual (em %)
Norte	7
Nordeste	17
Sudeste	50
Sul	18
Centro-Oeste	8

Disponível em: <http://www.epe.gov.br/mercado/Documents>. Acesso em: 15 jul. 2016. Adaptado para fins didáticos.

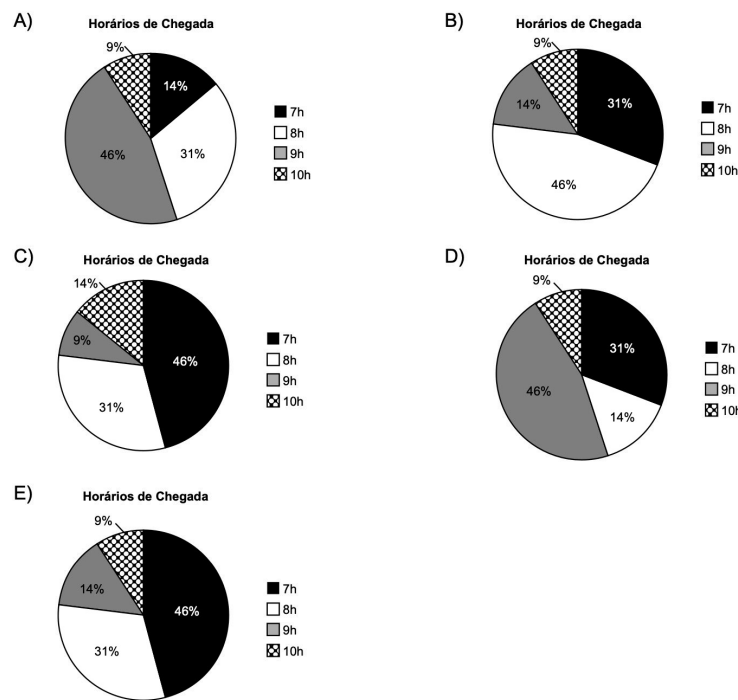
Qual é o gráfico que se relaciona com os dados fornecidos nessa tabela?



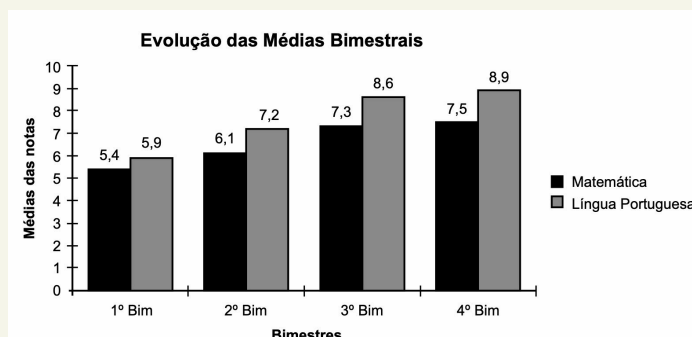
Questão 126 — SPAECE - Item M100522E4, Adaptado. Foi feita uma pesquisa em uma determinada empresa para encontrar um horário alternativo para a entrada dos funcionários. Cada um escolheu o horário que era mais conveniente para iniciar o trabalho e o resultado está representado na tabela abaixo.

Horários de chegada	Percentual de funcionários
7h	31%
8h	14%
9h	46%
10h	9%

Qual dos gráficos abaixo apresenta as informações dessa tabela?



Questão 127 — SAEPE - Item M100112H6, adaptado. O gráfico abaixo apresenta a média das notas nas avaliações de cada bimestre dos estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio nas disciplinas Matemática e Língua Portuguesa.



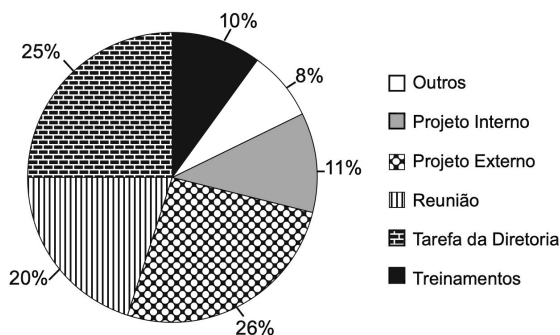
De acordo com os dados desse gráfico, os aumentos verificados nas médias das notas do segundo para o terceiro bimestre, nas disciplinas de Matemática e de Língua Portuguesa, foram, respectivamente, iguais a

- A) 0,7 e 1,3.
- B) 1,1 e 1,3.
- C) 1,2 e 1,4.
- D) 1,9 e 2,7.
- E) 2,1 e 3,0.

Questão 128 Com base nos dados da questão 127, calcule a média anual da turma em Língua Portuguesa e em Matemática. Em qual dessas duas disciplinas as médias bimestrais *variaram* mais?

Questão 129 — SPAECE - Item MM120896E4, adaptado. O gráfico a seguir apresenta as atribuições de um funcionário durante uma semana de trabalho.

Atribuições de um funcionário durante uma semana de trabalho



Corrija a seguinte tabela para que melhor represente os dados desse gráfico.

Atribuições	Porcentagem
Outros	10%
Projeto Interno	25%
Projeto Externo	20%
Reunião	26%
Tarefa da Diretoria	11%
Treinamentos	8%

Questão 130 — SAEIO - M120087ES. Em um envelope existem 4 perguntas sobre Geografia, 5 sobre História, 3 sobre Biologia e 2 sobre Inglês. Uma pergunta foi sorteada aleatoriamente.

A probabilidade de ser sorteada uma pergunta sobre Biologia é, aproximadamente,

- A) 21,43% B) 25% C) 27,27% D) 33,33% E) 75%

Questão 131 — PAEBES - Item M120708H6. Para realizar um sorteio, Rosana vai utilizar uma urna contendo 10 bolinhas idênticas numeradas de 1 a 10.

Qual é a probabilidade de a primeira bolinha retirada por Rosana dessa urna ser a de número 3?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{10}{9}$

Questão 132 — SAEPI - Item M120196H6. Em um saco havia 15 bolas idênticas numeradas de 1 a 15. Uma bola foi retirada aleatoriamente.

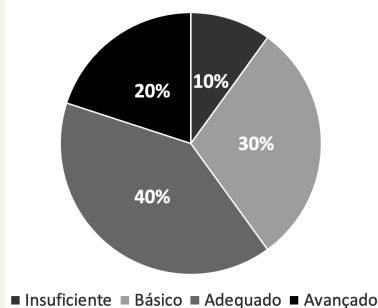
Qual é a probabilidade da bola retirada estar marcada com um número maior que 9?

- A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{6}{15}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{9}{15}$

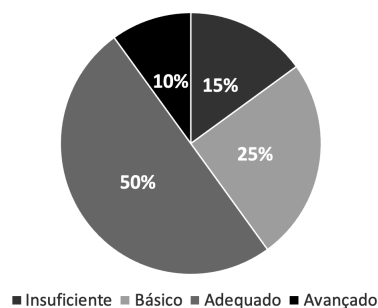
Questão 133 Considerando o contexto da questão 132, qual a probabilidade da bola retirada estar marcada com um número maior que 9, sabendo-se que esse número é ímpar?

Questão 134 Os seguintes gráficos de setores mostram os percentuais de desempenho dos alunos de duas turmas, A e B, do nono ano em um teste de Matemática na escola:

Desempenho em Matemática da Turma A



Desempenho em Matemática da Turma B



Sabendo que $\frac{2}{5}$ dos alunos estão na turma A e $\frac{3}{5}$ dos alunos na turma B, qual o percentual de alunos com desempenho adequado nas duas turmas ao todo?

- A) 45 % B) 46 % C) 50 % D) 90 %

Solução. Sabemos que $\frac{2}{5}$ dos alunos estão na turma A. Desses, o gráfico de setores do lado esquerdo informa que 40% estão no nível adequado, ou seja,

$$40\% \cdot \frac{2}{5} = \frac{80}{5}\% = 16\%.$$

Da mesma forma, sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos estão na turma B. Desses, o gráfico de setores do lado direito informa que 50% estão no nível adequado, ou seja,

$$50\% \cdot \frac{3}{5} = \frac{150}{5}\% = 30\%.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra B). ■

Questão 135 — PUC-RJ 2021. Um dado comum é um cubo com faces numeradas de 1 a 6. Jorge joga dois dados comuns e soma os pontos. Qual é a probabilidade de que a soma total seja igual a 5?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{5}{36}$

Solução. Os eventos favoráveis correspondem aos pares ordenados (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Logo, há 4 eventos favoráveis. No entanto, há $6 \cdot 6 = 36$ pares possíveis, ou seja, há 36 eventos possíveis. Assim, a probabilidade desejada é

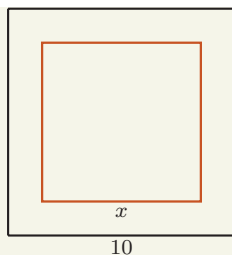
$$\frac{4}{36} = \frac{4 : 4}{36 : 4} = \frac{1}{9},$$

o que completa a solução. ■

Questão 136 — PUC-RJ 2022. Uma caixa contém 10 bolas azuis, de mesmo tamanho. Três delas têm o logotipo PUC escrito, e as outras, não. Dispõem-se, ao acaso, as dez bolas azuis, lado a lado, em linha reta. Qual é a probabilidade de que as três bolas com o logotipo desenhado fiquem juntas?

- A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{10}$

Questão 137 — UFRGS 2016, adaptado. Dardos são lançados em direção a um alvo com a forma de um quadrado de lado 10, como representado na figura abaixo, tendo igual probabilidade de atingir qualquer região do alvo.



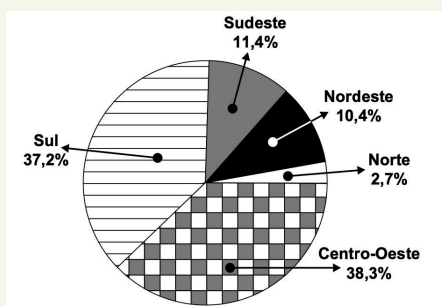
Se todos os dardos atingem o alvo e 50% atingem o quadrado de lado x , o valor inteiro mais próximo de x é

- A) 4. B) 5. C) 6. D) 7. E) 8.

Questão 138 — SAEPI - Item M120124H6. Em uma academia de dança foram inscritos 5 homens e 9 mulheres para as aulas de forró. Quantos pares diferentes constituídos por um homem e uma mulher poderão ser formados com esses alunos?

- A) 5 B) 45 C) 91 D) 126. E) 183.

Questão 139 — ENEM 2019 - PPL, Caderno 7 - Azul, Questão 140, adaptada. Considere que a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, aponte uma participação por região conforme indicado no gráfico. Em valores absolutos, essas estimativas indicam que as duas regiões maiores produtoras deveriam produzir juntas um total de 119,8 milhões de toneladas em 2012.



De acordo com esses dados, a produção estimada, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país, foi um valor mais aproximado de

- A) 11,4. B) 13,6. C) 15,7. D) 18,1. E) 35,6.

Questão 140 — ENEM 2014, Caderno 7 - Azul, Questão 137, adaptada. A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020. Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

A) 1,14.

B) 1,42.

C) 1,52.

D) 1,70.

E) 1,80.

Questão 141 — ENEM 2013, Caderno Azul, Questão 150. Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras: inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

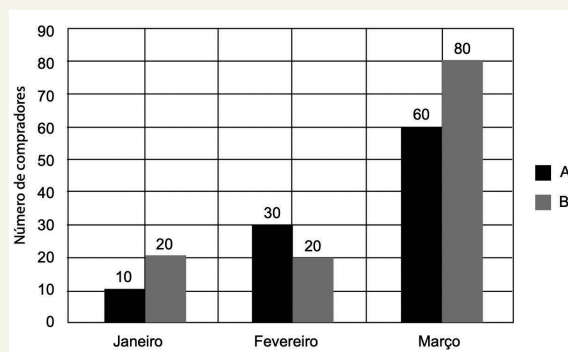
A) $1/2$.B) $5/8$.C) $1/4$.D) $5/6$.E) $5/14$.

Solução. Como há $1\,200 - 300 = 900$ alunos que falam pelo menos uma das duas línguas; e há $600 + 500 = 1\,100$ que falam inglês ou espanhol (“ou”, aqui, não significa alternativas excludentes, mas união de conjuntos), concluímos que $1\,100 - 900 = 200$ alunos falam as duas línguas (estão na intersecção dos conjuntos). Há, portanto, $500 - 200$ alunos que falam *apenas* espanhol. Considerando como espaço amostral o conjunto dos alunos que não falam inglês, vemos que esse conjunto tem $300 + 300 = 600$ alunos, os 300 que não falam nenhuma das duas línguas e os 300 que falam apenas espanhol. Assim, a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{300}{300 + 300} = \frac{1}{2},$$

o que corresponde à alternativa A).

Questão 142 — ENEM 2013, Caderno Amarelo, Questão 141. Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A) $1/20$.B) $3/242$.C) $5/22$.D) $6/25$.E) $7/15$.

Questão 143 A tabela seguinte mostra a distribuição, em percentuais, da população brasileira em diferentes grupos de idade, nos anos de 1980 e 2010.

Grupos de idade	Ano 1980	Ano 2010
0 a 14 anos	38,20%	24,08%
15 a 64 anos	57,68%	68,54%
65 anos ou mais	4,01%	7,38%

Fonte: IBGE. Disponível em <https://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/distribuicao-da-populacao-por-grandes-grupos-de-idade.html>

Faça as seguintes atividades com base nessa tabela.

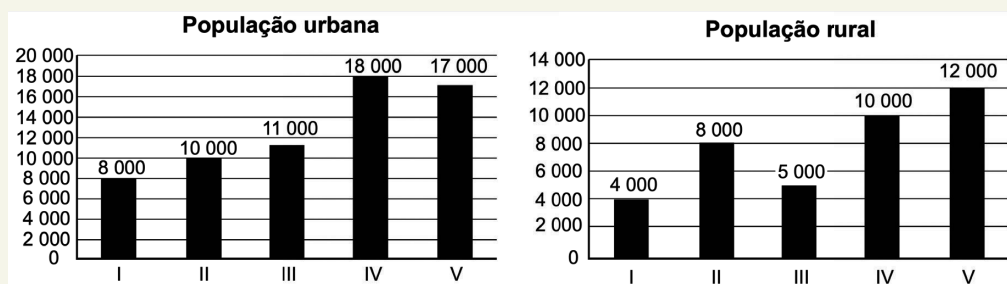
- Calcule o percentual de habitantes com 15 anos ou mais em 2010.
- Calcule o percentual de aumento da população de 65 anos ou mais de 1980 para 2010.
- Determine qual dos grupos teve maior aumento percentual de 1980 para 2010.
- Construa gráficos de barras para representar os dados na tabela.
- Construa gráficos de setores para representar os dados na tabela.
- Com base nos dados, podemos concluir que a população brasileira ficou “menos jovem” no período de 1980 a 2010?

Questão 144 A tabela seguinte informa taxas de câmbio e o preço, na moeda nacional, de um famoso sanduíche em alguns países.

País	Moeda	Taxa de câmbio	Preço do sanduíche
Brasil	Real (R\$)	1,00	R\$ 22,90
EUA	Dólar (US\$)	4,78	US\$ 5,15
Inglaterra	Libra (£)	6,10	£ 3,69

Com base nesses dados, em que país o sanduíche é mais caro para um turista brasileiro?

Questão 145 — ENEM 2019, Caderno Amarelo, Questão 177. A taxa de urbanização de um município é dada pela razão entre a população urbana e a população total do município (isto é, a soma das populações rural e urbana). Os gráficos apresentam, respectivamente, a população urbana e a população rural de cinco municípios (I, II, III, IV, V) de uma mesma região estadual. Em reunião entre o governo do estado e os prefeitos desses municípios, ficou acordado que o município com maior taxa de urbanização receberá um investimento extra em infraestrutura.



Segundo o acordo, qual município receberá o investimento extra?

- A) I B) II C) III D) IV E) V

Questão 146 Com base no enunciado e nos dados da questão 145, faça as seguintes atividades.

- Determine os municípios que têm população (urbana mais rural) maior que 20 000 habitantes.
- Determine a população total dos cinco municípios.
- Determine os percentuais da população urbana e da população rural de cada um dos cinco municípios.
- Calcule a média da população urbana dos cinco municípios.
- Construa uma tabela para representar os dados dos gráficos de barras.
- Construa gráficos de setores para as populações urbanas, as populações rurais e as populações totais dos cinco municípios.

Questão 147 A tabela abaixo mostra dados de 2021 sobre os percentuais da população em cada região brasileira abaixo das seguintes linhas de pobreza, definidas pelo Banco Mundial:

- extrema pobreza: renda abaixo de 1,90 dólares por dia;
- pobreza: renda acima de 1,90 dólares e abaixo de 5,50 dólares por dia.

Rendimento/Região	Rendimento		
Região	Extrema pobreza	Pobreza	População
Norte	13,0%	13,3%	8,7%
Nordeste	53,2%	44,8%	27,0%
Centro-Oeste	3,3%	5,5%	7,8%
Sudeste	29,5%	25,5%	42,1%
Sul	5,0%	6,9%	14,3%

De acordo com os dados na tabela, qual o percentual da população em extrema pobreza nas regiões Norte e Nordeste juntas?

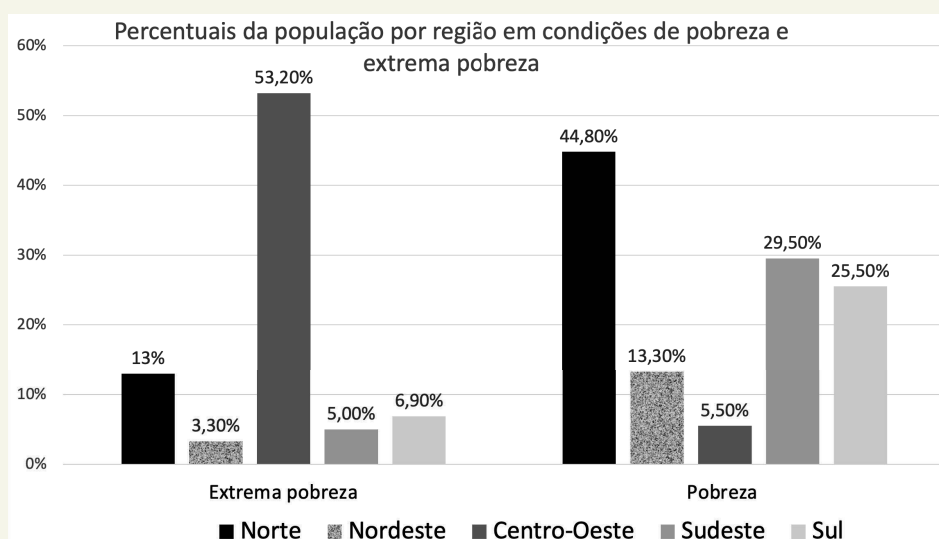
- A) 13,0 % B) 35,7% C) 53,2% D) 58,1% E) 66,5%

Questão 148 a) De acordo com os dados da tabela na questão 147, qual região tem a maior proporção de pessoas em condição de extrema pobreza?

b) Qual o percentual da população brasileira nessa condição?

Dica: para responder, observe que a coluna “População” na tabela indica o percentual da população brasileira em cada uma das regiões.

Questão 149 Corrija o seguinte gráfico de barras para que corresponda aos dados expostos nas colunas “extrema pobreza” e “pobreza” da tabela na questão 147.



Questão 150 Construa gráficos de setores que representem os dados na questão 147 correspondentes aos percentuais de extrema pobreza e pobreza nas cinco regiões.

