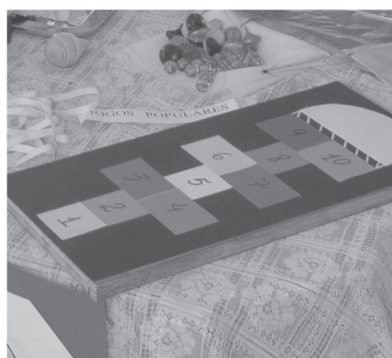


Funções: conceitos, propriedades e gráficos



Antônio de Pádua Raposo Mazulo
Ciro Nogueira Filho
José Othon Dantas Lopes
Manoel Ferreira de Azevedo Filho

Copyright do texto©2005 by Secretaria da Educação Básica do Ceará

Governador do Estado
Lúcio Gonçalves de Alcântara
Vice-Governador do Estado
Francisco de Queiroz Maia Júnior
Secretária da Educação Básica
Sofia Lerche Vieira
Secretário Adjunto da Educação Básica
Luís Eduardo de Menezes Lima
Secretária Executiva
Edlourdes Pires Moura Coelho
Coordenadoria de Planejamento e Política Educacional
Eloísa Maia Vidal
Coordenadoria de Articulação e Gestão Educacional
Maria Marlene Vieira Carneiro
Coordenadoria de Monitoramento e Controle
Edson Seabra Júnior
Coordenadoria de Desenvolvimento Técnico-Pedagógico
Silvana Gois Nogueira
Unidade de Gerenciamento de Projetos
José Ribeiro da Silva

Edições SEDUC

Coordenação editorial
Eloísa Maia Vidal

Capa e projeto gráfico
Roberto Santos

Editoração eletrônica
Elias Sabóia

Revisão
Fátima Porto

Fotografias
Arquivo da SEDUC

Este projeto conta com o apoio do Acordo de Empréstimo N° 4591/BR do Banco Mundial

F979f

Funções: conceitos, propriedades e gráficos /
Antônio de Pádua Raposo Mazulo [et al.].
Fortaleza: SEDUC, 2005.Educação
88p.

ISBN 85-98766-07-0

1. Matemática, funções. 1. Mazulo, Antônio de
Pádua Raposo II. Ceará. Secretaria de Educação Básica

CDD 515.92

Todos os direitos desta edição são reservados à Secretaria da Educação Básica.
Centro Administrativo Governador Virgílio Távora
Av. Gen. Afonso Albuquerque s/n, Cambéa
60.819-900 Fortaleza - Ceará - Brasil
www.seduc.ce.gov.br

Apresentação

O estado do Ceará tem registrado, nos últimos anos, avanços significativos no campo da gestão escolar. O processo de escolha dos dirigentes escolares e a criação de um Núcleo Gestor no qual existe um profissional dedicado às questões pedagógicas marca, sem dúvida, uma mudança no paradigma de acompanhamento pedagógico que cada unidade escolar e seu conjunto de professores passa a ter.

Esse modelo, iniciado em 1995, trazia em seu escopo a esperança de uma mudança significativa na relação ensino-aprendizagem e, como decorrência, uma melhoria nos indicadores de desempenho dos alunos. Coincidentemente, neste mesmo período iniciaram-se os processos de avaliação de larga escala, com destaque para o SAEB e SPAECE. No entanto, o histórico destas avaliações mostra que o desempenho dos alunos cearenses nas séries e disciplinas avaliadas – 4ª, 8ª do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, e Língua Portuguesa e Matemática respectivamente – vem apresentando resultados aquém do desejado.

Tal fato motivou a Secretaria da Educação Básica a investigar de forma mais acurada o que está acontecendo nas suas escolas e para tanto, concebeu uma pesquisa com vistas a mapear o currículo real que se dá em sala de aula, focalizando suas preocupações no Ensino Médio. O propósito era que os resultados de tal estudo subsidiassem ações orientadas que articulassem o currículo real, o currículo intencional e as Matrizes de Referência do SAEB e SPAECE. O objetivo seria a melhoria dos resultados de desempenho dos alunos na avaliação do SAEB em 2005.

Dados obtidos quando da realização da pesquisa sobre o currículo do Ensino Médio, mostraram que os conteúdos da disciplina Matemática tinham discrepâncias curriculares bastante significativas quando comparado o currículo efetivamente trabalhado em sala e aula e a Matriz de Referência do SAEB. Os conteúdos de **funções** e **geometria** eram os que apresentavam mais distorções quanto ao tempo pedagógico, expresso em carga horária didática, dedicado a cada um deles. Vale dizer que estes conteúdos são bastante explora-

dos nas provas do SAEB, enquanto as escolas dedicam, ao longo dos três anos de Ensino Médio, uma carga horária que não permite abordar todos os assuntos incluídos na Matriz do SAEB, acerca desses mesmos conteúdos.

Este livro é dedicado ao conteúdo **funções** e procura explorar todos os tópicos referentes ao assunto, na perspectiva dos descritores apresentados na Matriz de Referência do SAEB. A intenção é dar suporte teórico ao professor para que, na sala de aula, a abordagem curricular sobre este conteúdo esteja articulada com os objetivos do SAEB e assim os alunos possam apresentar um desempenho mais satisfatório nos exames de 2005.

Neste livro, o professor de Matemática vai encontrar apoio pedagógico para desenvolver suas atividades em sala de aula, com orientações didáticas acerca dos diversos conceitos de **funções**, bem como exercícios resolvidos e propostos, para aplicar com os alunos. Este material poderá ser utilizado durante as aulas regulares, em qualquer uma das séries do Ensino Médio, mas poderá também ser usado em jornadas extraclasse, como reforço escolar deste assunto para todos os alunos.

Secretaria da Educação Básica

Sumário

1	Aspectos pedagógicos relacionados com a Matriz de Referência do SAEB	7
1.1	As Matrizes de Referência do SAEB	8
1.2	O Ensino de Funções: aspectos históricos	11
1.3	O conceito de Função: a matematização	11
1.4	Tabelas, gráficos e localização	13
1.5	As Coordenadas Cartesianas	16
1.6	O Plano Cartesiano	18
1.7	O Conceito de Função	22
	Conclusão	26
2	Funções	28
2.1	Igualdade de funções	31
2.2	Determinação do domínio de uma função	32
2.3	Imagem direta de um conjunto por uma função	33
2.4	Funções Reais de Variável Real	34
2.4.1	Funções crescentes e funções decrescentes	35
2.4.2	Funções pares e funções ímpares	36
2.4.3	Zeros de uma função	36
2.4.4	Sinal de uma função	38
2.5	Alguns Tipos Particulares de Funções Reais de Variável Real	39
2.5.1	Funções constantes	39
2.5.2	Funções Lineares	40
2.6	Funções do 1º grau	43
2.6.1	Outras propriedades das funções do 1º grau	45
2.7	Função do 2º grau	46
3	Funções Trigonométricas	54
3.1	A função seno: $f(x) = \text{sen } x$	54
3.2	A função cosseno: $f(x) = \text{cos } x$	62
3.3	A função tangente: $f(x) = \text{tg } x$	67
4	Função Exponencial	72
4.1	Definição, Gráficos e Propriedades	72
4.2	A Função Logarítmica	78
4.3	Inequações Logarítmicas	80
	Bibliografia	84
	Sobre os Autores	85

1 Aspectos pedagógicos relacionados com a Matriz de Referência do SAEB

O SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica foi criado em 1990 com o objetivo de subsidiar o gerenciamento da educação pública nas mudanças necessárias na busca da melhoria da qualidade de aprendizagem.

No que compete ao estado do Ceará, a Secretaria da Educação Básica vem dispendendo esforços com o intuito de melhorar o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, principalmente no Ensino Médio. Registre-se a implementação do Programa de Capacitação Continuada e em serviço na área de Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias, constituído de três fases de 40 horas por disciplina, sendo que a primeira fase, em Matemática, foi concluída em maio/2005.

No ano de 2001, em Matemática e na 3ª série do Ensino Médio, o SAEB avaliou os temas a seguir:

- Espaço e Forma
- Número e Operações/Álgebra e Funções
- Tratamento da Informação

As escalas do SAEB ordenam o desempenho dos alunos do nível mais baixo ao mais alto, apresentando 10 níveis, com intervalos que variam de 125 a 425 e acima, conforme quadro 1 a seguir.

Quadro 1

Níveis de proficiência em Matemática do SAEB									
Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10
125 a 150	150 a 175	175 a 200	200 a 250	250 a 300	300 a 350	350 a 375	375 a 400	400 a 425	425 e acima

Fonte: SAEB 2001

Foram estabelecidos estágios para categorizar o resultado da avaliação de acordo com o nível alcançado pelos alunos, como mostra o quadro 2.

Quadro 2

Escala por Estágio, segundo o Nível em Matemática			
Estágio	4.ª Série	8.ª Série	3.ª Série
Muito Crítico	<1	1 ou 2	≥3
Crítico	1 ou 2	3 ou 4	4 ou 5
Intermediário	3 ou 4	5 ou 6	6 ou 7
Adequado	≥ 5	≥ 7	≥ 8

De acordo com o Relatório SAEB 2001 - Matemática,

Pela escala, pode-se verificar que percentual de alunos já constituiu as competências e habilidades desejáveis para cada uma

das séries avaliadas, quantos ainda estão em processo de construção, quantos estão abaixo do nível que seria desejável para a série e quantos estão acima do nível que seria esperado.

Evidentemente que para a 3ª série do Ensino Médio o desempenho desejado é o nível 8, que contempla o intervalo 375 a 400 e que, na escala, coloca os alunos nesta etapa de estudo no estágio **adequado**. No entanto, os dados de 2003 para esta disciplina revelam que:

- Média do Brasil: 278,7 pontos; Nível 5 - **Crítico**
- Média do Nordeste: 266,1 pontos; Nível 5 - **Crítico**
- Média do Ceará: 271,2 pontos; Nível 5 - **Crítico**

Como podemos observar, o desempenho cearense do Ensino Médio, em Matemática, está colocado em estágio **crítico**, porém a média é maior que a nordestina. Registra-se, também, o melhor desempenho e o 2º maior crescimento no âmbito dos estados nordestinos.

1.1 As Matrizes de Referência do SAEB

O Relatório SAEB 2001 registra que os testes aplicados aos alunos avaliam os descritores relacionados nas Matrizes de Referência do SAEB. O **descritor** é uma associação entre conteúdos curriculares e operações mentais desenvolvidas pelo aluno que traduzem certas competências e habilidades.

Para melhor compreensão das Matrizes Curriculares do SAEB, destaca-se algumas de suas características básicas, quais sejam:

- Descrevem o objeto da avaliação, o conteúdo a ser avaliado em cada disciplina, informando as competências e habilidades esperadas do aluno para um determinado ciclo ou período de ensino.
- Não englobam todo o currículo. É feito um recorte com base no que possa ser possível aferir por meio do tipo de instrumento de medida utilizado no SAEB e que seja representativo no que está contemplado nos currículos vigentes no Brasil.
- A associação entre conteúdo curricular e operação mental apresenta um resultado que é a matéria-prima a partir da qual é possível elaborar um item de prova. As respostas dadas pelos alunos a esses itens possibilitam a descrição do nível de desempenho por eles atingido. A partir daí, é dado a conhecer o desempenho do sistema de ensino.

Mesmo considerando a advertência do SAEB de que as Matrizes não podem ser confundidas com procedimentos, estratégias de ensino ou orientações metodológicas para o professor, é preciso identificar que fatores ou variáveis estão interferindo no processo

de ensino para que o desempenho apresentado pelos alunos os coloque no nível crítico.

Para tanto, e analisando comparativamente a Matriz de Referência do SAEB com a Matriz Curricular¹ proposta para o Ensino Médio, foi possível identificar algumas questões que merecem destaque:

- Na Matriz de Referência do SAEB tem incidência 0%: **Sistemas Lineares, Polinômios e Números Complexos**.
- Em **trigonometria** as análises das variações se limitam ao ângulo de uma volta e as funções **senx**, **cosx** e **tgx** são estudadas no item **Funções**.
- Os itens **Funções** e **Geometria** têm, respectivamente, incidência **38%** e **34,3%** na Matriz de Referência do SAEB.

Os destaques desses três itens têm o propósito de suscitar uma reflexão sobre a relação entre a abordagem e desenvolvimento destes itens pelo Professor em sala de aula e a sua incidência nos descritores da Matriz de Referência do SAEB, como indicadores para a elaboração de questões da avaliação. Examinaremos, para exemplificar, os conteúdos **Função** e **Geometria**, que incorrem com maiores percentuais na Matriz de Referência do SAEB. Veja o quadro 3, a seguir:

Quadro 3

Funções	%	N.º de Descritores	Geometria	%	N.º de Descritores
Conceito	24,00	9	Plana	8,6	3
Tipos de Funções					
Propriedades			Espacial	2,8	1
Gráficos			Métrica	5,8	2
Exponenciais e Logaritmos	11,00	4			
Trigonométricas	3,00	1	Analítica	17,1	6
TOTAL	38,00	14	TOTAL	34,3	12

Algumas questões podem ser imediatamente levantadas:

- Se o percentual de carga horária apontada pela Pesquisa² da SEDUC revela 21,4% para **Funções** e 18,3% para **Geometria**, valores que se aproximam dos previstos na Matriz Curricular da SEDUC (20% e 25%), por que motivo (ou motivos) o desempenho dos alunos se situa no estágio crítico?
- Considerando-se que todos os subitens dos itens de conteúdos **Funções** e **Geometria** tenham sido trabalhados em sala de

¹ A Matriz Curricular a que estamos nos referindo é a que foi proposta durante a realização do *Seminário Estadual de Currículo do Ensino Médio*, realizado em 2004, em parceria com o Ministério da Educação.

² A Pesquisa aqui referida é aquela que está detalhada no texto *O currículo do ensino médio no Ceará*, 2005.

aula, por que então, mesmo assim, o desempenho dos alunos nos testes do SAEB são decepcionantes?

- Será que a forma de apresentação e desenvolvimento pedagógico dos conteúdos trabalhados pelo Professor não se traduz em aprendizagem pelo alunos? (análise e interpretação de assuntos que se interrelacionam; domínio de técnicas algorítmicas e algébricas gerais; organização lógica do raciocínio para elaboração da seqüência de passos após a definição do caminho da resolução da questão, conforme preconiza o SAEB?)

Na verdade, essas questões, e outras que deverão se constituir em objeto de nossa investigação, parecem fortalecer ou consolidar a tese de que haja uma discussão criteriosa dos itens e subitens dos conteúdos e sua distribuição percentual sobre a carga horária total da disciplina de Matemática no Ensino Médio.

A abordagem pedagógica e metodológica que o professor desenvolve em sala deverá sugerir os encaminhamentos mais elucidativos, decididamente acertados e possíveis que nos remetam para o desencadeamento de ações efetivas para o resgate da qualidade da aprendizagem em nossas escolas, mais precisamente da melhoria do desempenho em Matemática de todos os alunos.

A mais recente publicação do MEC/INEP, intitulada *Qualidade da Educação: uma nova leitura do desempenho dos estudantes da 3ª série do Ensino Médio*, afirma que

No Brasil, hoje, temos um enorme contingente de estudantes concluintes do ensino médio sem preparo para o trabalho, sem condições concretas para ingressarem de forma competente no ensino superior e um enorme desperdício de recursos públicos com a evasão e o abandono. Os dados sugerem reformulações estruturais para o ensino médio. É preciso repensar o conteúdo do que é ensinado, melhorar a capacitação dos professores, valorizando-os como profissionais de fato, além de melhorar o fluxo. Isto não deve ser feito de forma atabalhoada. São muitas as variáveis a serem consideradas. O que se sabe é que a demanda por vagas é crescente, há falta de professores, principalmente para algumas disciplinas, e as desigualdades são patentes. As soluções para esse nível de ensino serão estratégias para melhorar a qualidade da formação profissional dos jovens brasileiros e ampliar o número de alunos melhor qualificados no ensino superior. Esse é um problema da Nação e de todos federados (p. 8).

Este apelo, de cunho nacional, será o mote para o desencadeamento das ações pedagógicas que, amparadas nas reflexões realizadas e expostas neste trabalho, certamente redundarão na melhoria da qualidade da aprendizagem de Matemática de nossos alunos de Ensino Médio.

1.2 O Ensino de Funções: aspectos históricos

Será que o assunto **Funções** sempre foi objeto de estudo no currículo do Ensino Médio? (ou nos significados equivalentes dados ao longo do tempo a esse nível de ensino?). Podemos responder que há mais de um século que matemáticos como **Felix Klein** e **Jules Tannery** já manifestavam preocupação com esta questão. No ano de 1893, no *Congresso Internacional de Matemática* realizado na cidade de Chicago, Felix Klein foi o primeiro a defender a conveniência de adotar-se como idéia axial, capaz de unificar o ensino dessa matéria (Matemática), o **conceito de função**. Decorridos alguns anos, em 1904, numa conferência proferida em Göttingen e sob o Título *Do principal objetivo do ensino de Matemática na Escola Secundária*, o professor assim expressou-se:

Uma grande parte do ensino nas classes superiores ainda se apresenta como a simples justaposição de um novo capítulo, interessante por si mesmo, mas inteiramente isolado. Desse modo, só de maneira muito indireta se prepara uma compreensão clara dos princípios matemáticos que entram na formação de nossa cultura moderna. Tais princípios repousam, muito essencialmente, sobre a noção de função e a sua representação sob forma geométrica e analítica. Sim meus senhores, estou plenamente convencido de que o conceito de função, sob forma geométrica, deve ser a alma do ensino da Matemática na escola secundária. (A Matemática na Escola Secundária, Euclides Roxo, Companhia Editora Nacional, Rio de Janeiro, 1957).

Impõe-se, no entanto, averiguarmos se a forma de apresentação da idéia de função proposta por Klein coincide com a adotada e desenvolvida atualmente no Ensino Médio. Alguns pressupostos básicos amparavam a posição, talvez empedernida, do matemático pedagogo:

- A observação do estado de permanente mutabilidade dos fenômenos naturais. Assim, na natureza não podemos admitir situações constantes ou fixas. Mais precisamente, como imutáveis só é possível admitir aquelas situações imperceptíveis sensorialmente.
- A finalidade da Ciência prende-se a desvendar a interdependência entre as coisas, expressando essa dependência funcionalmente, ou seja, explicando por meio de relações funcionais os dados de fenômenos interdependentes.

1.3 O conceito de Função: a matematização

Mostramos, assim, que o fio condutor para a apreensão do conceito de função deve ser a compreensão da idéia de **variabilidade** e

de **interdependência**. Por exemplo, é de fácil entendimento que o preço da gasolina que é vendida nos postos é **função** das oscilações do preço do petróleo nos países produtores; que a pressão atmosférica observada em determinado local é **função** da altitude do local; que a área do círculo é **função** do seu raio; que a capacidade de uma caixa d'água é **função** da medida das suas dimensões, etc. Em todas essas relações entre grandezas identificamos muito nitidamente fatores de **variabilidade** e de **interdependência**.

Mas, se de um lado admitimos que a formação do conceito de **função** envolve a compreensão do significado desses dois fatores, teremos que, de outro lado, admitir que a importância e reconhecimento científico somente ocorrerá se fizermos a tradução das relações de interdependência e de variabilidade por expressões matemáticas que representem os dados listados em quadros ou tabelas sobre o fenômeno observado.

Se considerarmos os principais objetivos do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, formar no estudante uma mentalidade investigativa para compreensão dos fenômenos, sejam eles puramente científicos ou de natureza político-social, devemos concordar com o matemático Jules Tannery, que 1903 assim expressou-se:

Só se pode saber um pouco o que são as matemáticas, só se pode suspeitar a sua extensão extraordinária, a natureza dos problemas que elas estabelecem e resolvem, quando se sabe o que é função, de que modo se estuda uma função, como se seguem as suas variações, como se lhe representa a marcha por uma curva, de que maneira a álgebra e a geometria se auxiliam entre si, de que sorte o número e o espaço se esclarecem mutuamente, como é que se determina uma tangente, uma área, um volume, de que modo o homem é levado a criar novas funções, novas curvas e a estudá-lhes as propriedades (...). O aluno deve ser levado a tomar o hábito de pensar a respeito das conexões que existem entre quantidades dependentes, não somente porque tal hábito forma o melhor fundamento para uma apreciação da teoria que possa seguir mais tarde, mas principalmente porque esse hábito habilitá-lo-á pensar mais claramente sobre quantidades com as quais ele terá de lidar na vida real, quer prossiga ou não, nos seus estudos de Matemática.

Além disso, é fato que o desenvolvimento do hábito de raciocinar fazendo relações entre grandezas é um processo que facilita a compreensão de inúmeras situações do nosso cotidiano. Por esse e outros motivos e assim como não devemos conduzir o ensino de Matemática na presunção de que nossos alunos serão futuros matemáticos, também não devemos esquecer o fato de que todos precisarão de uma adequada preparação matemática para o enfrentamento dos problemas inerentes à vida em si mesma e na profissão que vierem a abraçar.

Isto posto, sabemos agora que para desenvolvermos nos alunos a idéia de **funcionalidade** duas questões basilares emergem:

- i) A compreensão do significado da relação de **interdependência** entre duas grandezas.
- ii) A determinação do comportamento da relação expressando-a por **meio algébrico** (simbolicamente) de modo a identificar-se a natureza interdependente da variação em qualquer sentido.

Alguns procedimentos pedagógicos podem ser desenvolvidos em sala de aula de forma a convergir para o reconhecimento da relação de interdependência. São eles:

- A construção de tabelas ou quadros com dados numéricos com informações sobre temperaturas durante as estações do ano; renda *per capita* entre países ou entre estados brasileiros; população entre países ou entre estados brasileiros, etc.
- Desenvolvimento da habilidade de expressar relações diversas por meio de fórmulas algébricas, utilizando tabelas de dados.
- Experimentar variações entre as grandezas para compreender o comportamento de uma variável que seja afetada pela mudança de uma outra que com ela esteja relacionada.

Por exemplo, o cálculo do comprimento da circunferência dado pela fórmula $C=2\pi R$, e o cálculo de juros simples onde $J = \frac{Cit}{100}$, podem ser utilizados para a compreensão de variação entre grandezas, quando o Professor propõe situações do tipo a seguir:

Professor: O que acontece com o comprimento de uma circunferência quando aumentamos ou diminuímos a dimensão do seu raio. Construa uma tabela de valores para os dois casos.

Professor: O que acontece com o valor dos **juros** quando variamos o **capital**? E se variarmos ao mesmo tempo a **taxa** e o **tempo**, mantendo o **capital** constante, o que acontece com o valor dos juros? Para todos os casos elabore uma tabela de valores.

1.4 Tabelas, gráficos e localização

O trabalho com gráficos é facilitado porque é comum encontrarmos em revistas e jornais apresentação de notícias e reportagens sobre assuntos e fenômenos diversos com seus detalhamentos apresentados em tabelas e gráficos; é por meio deles que o Professor pode implementar o estudo de variação entre grandezas.

Uma reportagem sobre o pagamento de tributos no Brasil publicada pela revista *Veja*, datada de 28/07/2004, afirma que a carga tributária brasileira se compara à de países ricos e de longa tradição assistencial. No Canadá e na Alemanha, por exemplo, os altos impostos custeiam integralmente gastos com saúde, educação e segurança.

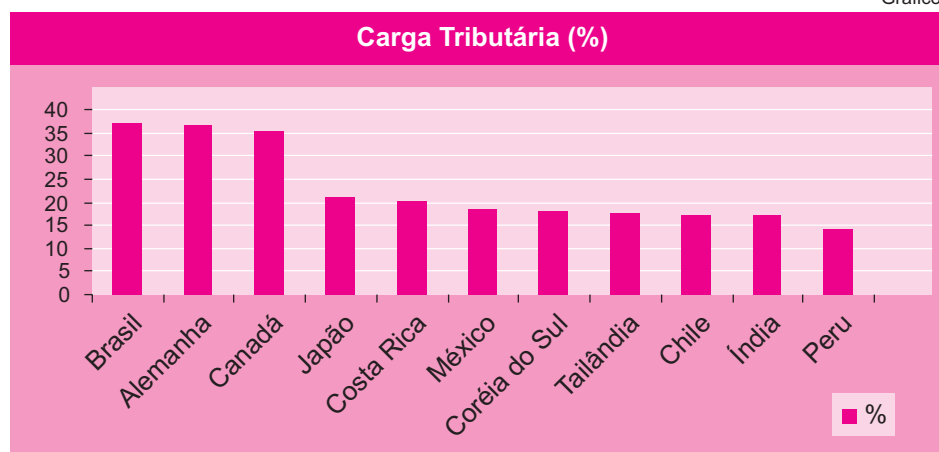
No Brasil paga-se muito, mas os serviços estatais são inexistentes ou precários (Brasil: projeção para 2004. Demais países: dados de 2002). Observe a tabela e os gráficos a seguir:

Tabela 1

Carga Tributária (%)	
Países	%
Brasil	37
Alemanha	36,4
Canadá	35,2
Japão	21
Costa Rica	20,3
México	18,3
Coréia do Sul	17,9
Tailândia	17,6
Chile	17,3
Índia	17,2
Peru	14

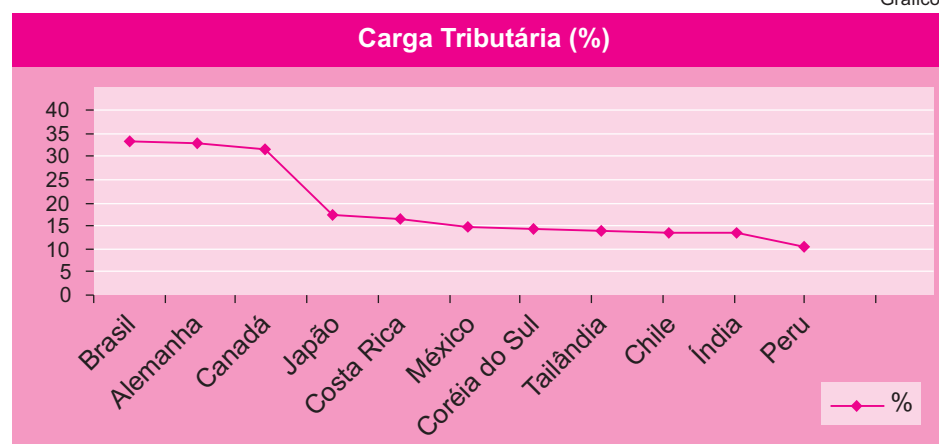
FONTES: BANCO MUNDIAL e FMI

Gráfico 1



FONTE: CEM/NCNMT

Gráfico 2



FONTE: CEM/NCNMT

O professor deve mostrar aos alunos que os quantitativos representam o percentual que os países arrecadam sobre tudo o que neles é produzido, o Produto Interno Bruto (PIB). A análise da variação dos dados inclui a constatação do fato de que os 37% da carga tributária sobre o PIB atribuída ao Brasil,

Não seria nada demais se parte dessa arrecadação financiasse o investimento naquelas áreas em que o Estado deve estar presente, o que não vem acontecendo. É uma carga tributária compatível com a de países ricos, como Alemanha e Canadá, conhecidos pela excelência dos serviços públicos que oferecem a seus cidadãos. No Brasil, o estado não cumpre seu papel, mas cobra caro assim mesmo (Veja, 28/07/2004).

Na mesma revista é veiculada uma matéria sobre os 56.364 pacientes que esperam por uma operação de transplante de órgãos, distribuídos de acordo com a tabela 2 a seguir:

Tabela 2

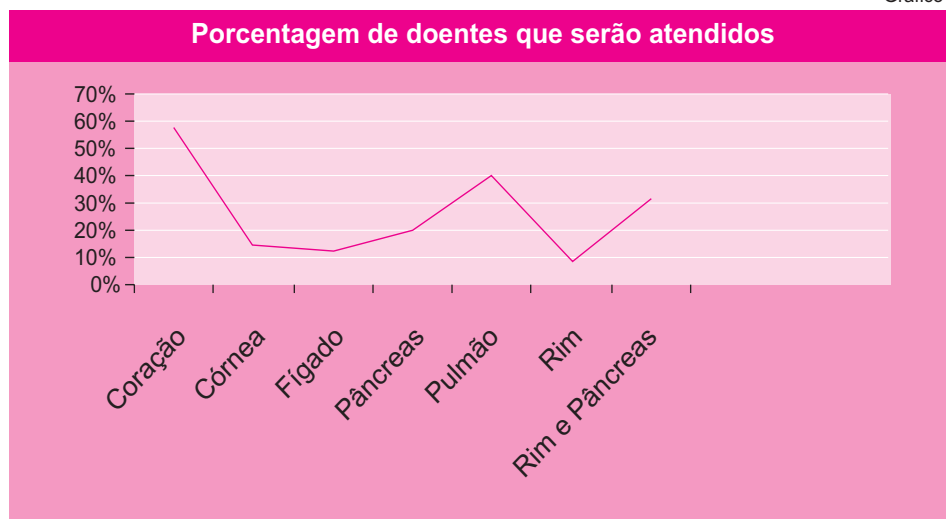
Transplantes de Órgãos no Brasil								
O RETRATO DO DRAMA O número de transplantes que serão realizados neste ano no Brasil atende apenas a 11,7% da fila. Veja ao lado.	Transplante	Coração	Córnea	Fígado	Pâncreas	Pulmão	Rim	Rim e Pâncreas
	Número de cirurgias*	147	3.246	525	36	36	2.496	123
	Número de doentes na fila	254	22.450	4.287	180	90	28.717	386
	Porcentagem de doentes que serão atendidos	57,80%	14,40%	12,20%	20%	40%	8,70%	31,80%

*Projeção para 2003

**Não estão computados os transplantes de medula, tecidos nem os retransplantes

O gráfico 3, a seguir, representa o percentual de doentes que serão atendidos, projeção para 2003, dentre aqueles que estão na fila de acordo com a especificidade da doença.

Gráfico 3



FONTE: CEM/NCNMT

Neste caso, a comparação entre interdependência dos dados pode ser bastante trabalhada pelo professor. É preciso notar que os percentuais se referem à quantidade de cirurgias que provavelmente serão realizadas, de acordo com o número de doentes candidatos e que estão na fila à espera de um tipo específico de transplante.

Acrescente-se o fato de que “no Brasil há 5,6 doadores por milhão de habitantes. Em Portugal, por exemplo, essa relação é 21,7 por milhão. O resultado é trágico. Neste ano, serão realizados no país cerca de 6.600 transplantes, o que atende apenas 11,7% dos que estão à espera” (Veja, 20/8/2003).

1.5 As Coordenadas Cartesianas

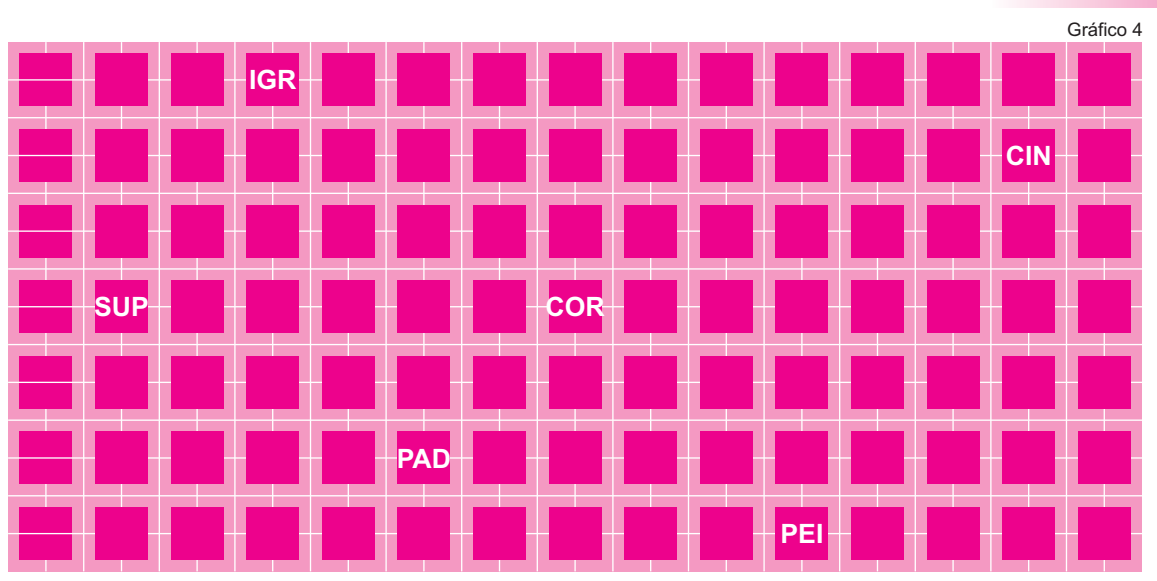
A principal dificuldade que se observa nos alunos com relação à construção de gráficos no sistema de coordenadas cartesianas é a localização de pontos no plano e a idéia de movimento que se estabelece quando imaginamos pontos caminhando sobre retas e curvas. A importância dessa exercitação e o seu objetivo nuclear é a compreensão do que ocorre com as coordenadas dos pontos considerados no deslocamento. Para motivar e como estratégia, o Professor pode criar situações como a seguinte:

Túlio resolveu conhecer o bairro onde reside a sua namorada e tomou como ponto de referência a agência dos Correios para traçar os itinerários, com o objetivo de conhecer os locais de sua predileção. Ele construiu um mapa de localização utilizando como critério de deslocamento: primeiro, andar para a direita ou para a esquerda e, segundo, subindo ou descendo.

Veja o mapa que Túlio elaborou situando os locais que pretende conhecer, ou seja, o **Supermercado**, o **Cinema**, a **Igreja**, a **Padaria** e a **Peixaria**.

Observe agora a forma como Túlio organiza e descreve os itinerários para localizar e atingir os locais de sua preferência.

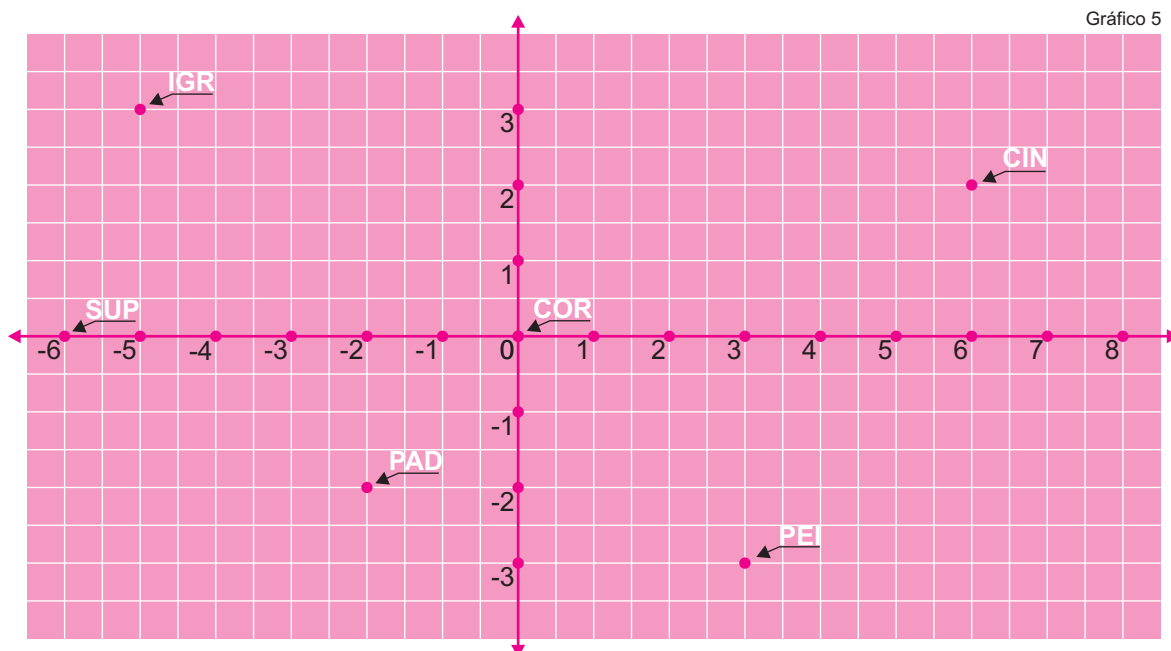
- **IGR(Igreja)**: saindo dos **Correios**, percorrer cinco quadras à esquerda, dobrar e subir três quadras.
- **SUP(Supermercado)**: saindo dos **Correios**, seguir à esquerda seis quadras.
- **PAD(Padaria)**: saindo dos **Correios**, seguir duas quadras à esquerda, dobrar e descer duas quadras.
- **CIN(Cinema)**: saindo dos **Correios**, seguir à direita seis quadras, dobrar e subir duas quadras.
- **PEI(Peixaria)**: saindo dos **Correios**, seguir à direita três quadras, dobrar e descer três quadras.



A proposta de questões dessa natureza não deve se resumir a exercícios de mera observação onde o aluno participa apenas como expectador. O Professor e os próprios alunos devem sugerir outros pontos referenciais do bairro (casa lotérica, restaurante mais freqüentado, posto de saúde, etc.) para a compreensão perfeita da movimentação do deslocamento organizado numa seqüência lógica: **di-reita/esquerda** e **subir/descer**.

A exploração de localização de muitos itinerários vai permitir ao aluno entender os princípios do **gráfico cartesiano** que substitui matematicamente, e de forma mais significativa, o **mapa de localização** mesmo considerando o esquema bem elaborado para a sua utilização.

Depois que o estudante tem domínio da utilização do **mapa**, o professor já pode apresentar um outro **desenho** que irá facilitar a determinação da situação de locais de referência no bairro.



Algumas considerações sobre a relação **mapa/desenho**:

- i) Cada quarteirão do bairro mostrado no **mapa** é representado no **desenho** pela convergência de duas linhas.
- ii) A numeração adotada no **desenho** utilizando números inteiros positivos e negativos significa que:
 - O sentido é **positivo** quando o deslocamento se efetiva para a **direita** e para **cima**.
 - O sentido é **negativo** quando o deslocamento se efetiva para a **esquerda** e para **baixo**.
 - O ponto **Zero (0)** foi tomado pelo encontro das **linhas** onde se encontra o quarteirão em que o prédio dos **Correios** está localizado.
- iii) Os alunos devem compreender que cada **ponto referência** pode ser representado por um par de números com significados individuais.
 - $IGR=(-5,3)$; significa que a igreja está distante cinco quarteirões à esquerda dos Correios e três acima dele.
 - $SUP=(-6,0)$; significa que o Supermercado está distante seis quarteirões à esquerda dos Correios e nenhum acima ou abaixo dele.
 - $PAD=(-2,-2)$; significa que a Padaria está distante dois quarteirões à esquerda dos Correios e dois abaixo dele.
 - $CIN=(6,2)$; significa que o cinema está distante seis quarteirões à direita dos Correios e dois acima dele.

E, assim por diante.

1.6 O Plano Cartesiano

Observe os gráficos e tabelas a seguir:

Gráfico 6

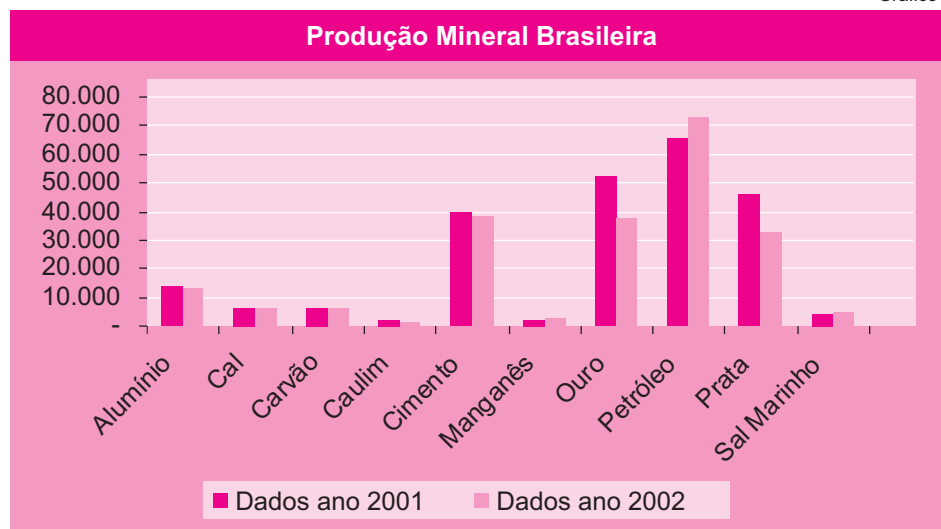


Gráfico 7

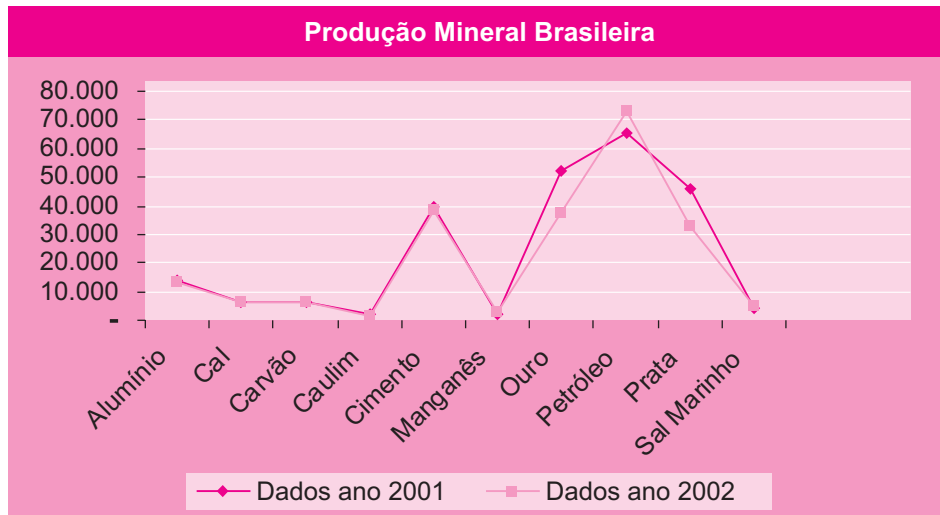
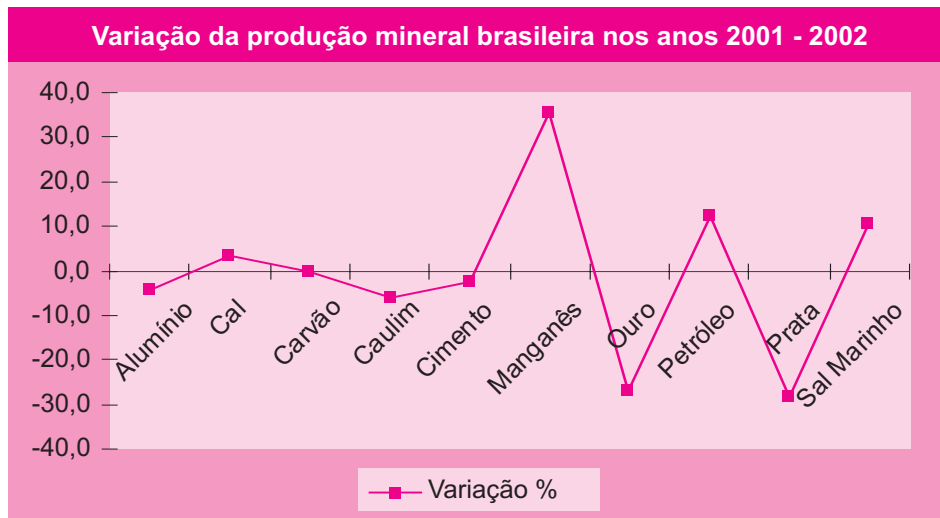


Gráfico 8



O que chamamos hoje de **Plano Cartesiano** tem origem nos estudos desenvolvidos pelo físico, filósofo e matemático francês que viveu no século XVII (1596 – 1650), **René Descartes**.

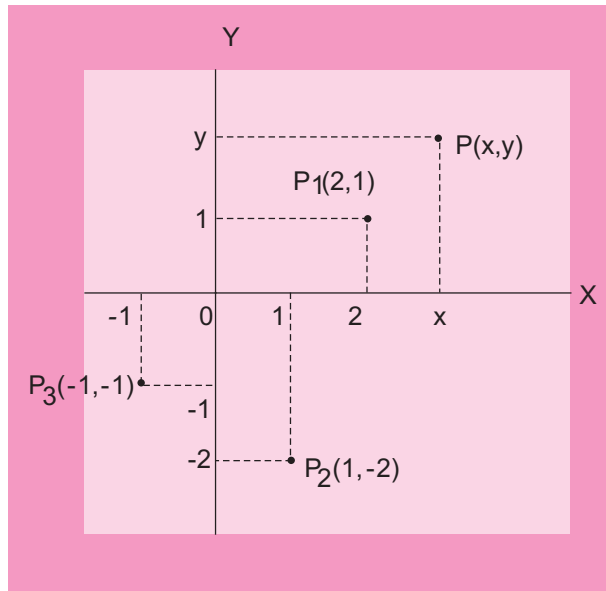
Descartes pertencia a uma boa família e recebeu educação cuidada no colégio jesuíta em La Flèche, onde os livros de texto de Clavius³ eram fundamentais. Mais tarde graduou-se em Poitiers, onde estudara Direito sem entusiasmo. Durante vários anos ele viajou em conjunção com várias campanhas militares. Em Paris ele conheceu Mersenne e um círculo de cientistas que discutiam livremente críticas ao pensamento paripatético; de tais estímulos progrediu para tornar-se o **pai da filosofia moderna**, para apresentar uma visão científica transformada do mundo e estabelecer um novo ramo da Matemática.

³. Christoph Clavius (1537 – 1612), jesuíta e matemático amigo de Kepler que em 1593 publicou uma tabela de senos.

Em 1628 deixou a França indo para a Holanda onde passou os vinte anos seguintes, onde escreveu a obra bem conhecida, **La Geometria**, que levou a **Geometria Analítica** ao conhecimento de seus contemporâneos (Excerto de História da Matemática, Carl Boyer, E. Blucher, 1974, p. 247).

A Geometria Analítica ficou posteriormente conhecida como **Geometria Cartesiana**, e daí o **Plano Cartesiano** e seus pares ordenados, ou **coordenadas cartesianas**. Observe a figura

Figura 1



- O Plano Cartesiano é determinado pelas retas perpendiculares entre si **X** e **Y**.
- Um ponto **P** qualquer é determinado por suas **coordenadas** ou pelo par ordenado **(x, y)**.
- **Abcissa** é a coordenada do ponto P no eixo **X** e **ordenada** é a coordenada do ponto P no eixo **Y**.
- Qualquer ponto **P** do Plano Cartesiano é representado pelo par ordenado $P(x,y) = P(\text{abscissa}, \text{ordenada})$, sempre nessa ordem.
- Os pontos P, P_1 , P_2 e P_3 são pontos determinados no plano cartesiano.

A situação registrada no gráfico 6, sobre a Produção Mineral Brasileira, pode ser apresentada nos gráficos 6 e 7 e a variação na produção ocorrida entre os anos 2001 e 2002 é mostrada no gráfico 8. Veja algumas características desses gráficos.

- Todos eles são elaborados utilizando o **Plano Cartesiano** e seu sistema de coordenadas: eixo-x, das abscissas e eixo-y, o das coordenadas.
- O gráfico 6, também chamado de **Gráfico de Colunas**, é bastante utilizado em Estatística, registra somente valores no 1º

quadrante do Plano Cartesiano. Cada substância mineral é representada no gráfico por uma coluna que, de acordo com a legenda, se refere ao ano em que foi produzida.

- O gráfico 7, conhecido como **Gráfico de Linhas**, a exemplo do anterior, é também usado na Estatística e registra seus valores no 1º quadrante do Plano Cartesiano. O eixo-x representará as substâncias minerais produzidas e o eixo-y, os quantitativos referentes à produção anual de cada uma delas. Por exemplo, o ponto **P (alumínio, 13.790)** representa a produção de **Alumínio** no ano de 2001, e o ponto **P (Petróleo, 73.295)** indica a produção de **Petróleo** no ano de 2002. Quando unimos os pontos determinados no Plano Cartesiano e que representam as **coordenadas** de cada substância mineral, teremos as **Linhas** que se referem, respectivamente, à Produção Mineral Brasileira no ano de 2001 e no ano de 2002.
- O Gráfico 8, mostra a **variação** entre a produção das substâncias minerais nos anos de 2001 e 2002. Neste caso, o gráfico tem pontos onde as **ordenadas**, valores anotados no eixo-y, assumem quantitativos negativos. Por exemplo, **P (Alumínio, -4,4)** e **P₁ (Caulim, -6)** significa que a produção de **Alumínio** e **Caulim**, no ano de 2002 foi **menor** que a de 2001.

A reflexão que o Professor deve propor aos alunos pode ser concomitante dos gráficos (ou apresentação se os levar já prontos), onde diversas questões podem ser levantadas para discussão. Por exemplo:

- O que justifica o fato de que os desenhos dos gráficos 6 e 7 estejam representados somente no 1º quadrante do Plano Cartesiano?
- Em qual dos gráficos, 6 ou 7, é mais fácil (ou mais visível) a interpretação quantitativa da Produção Mineral Brasileira? O Professor deve motivar a reflexão sobre a apresentação no gráfico 7 da produção de alumínio, cal, carvão, caulim, cimento e manganês que, em comparação com o gráfico 6, estão indistinguíveis. Este fato pode impedir a interpretação da produção registrada entre 2001 e 2002?
- Existe alguma relação de dependência entre as grandezas **substância produzida** e **quantitativo da produção**? A compreensão da interdependência entre grandezas envolvidas na construção do gráfico será de vital importância para que o aluno estabeleça a diferença entre um gráfico que mostre o comportamento no Plano Cartesiano de um fenômeno qualquer e aquele que representa uma **função**, evidentemente, se a situação de dependência for determinada por uma **lei**.
- Por que o gráfico 8 não tem pontos com representação nos quadrantes 2 e 3? Que interpretação poder-se-ia dar se tal fato pudesse acontecer?

1.7 O Conceito de Função

A questão básica é a seguinte: **que conceito de Função desejamos que nossos alunos aprendam?** Podemos refletir sobre dois aspectos principais:

- Uma função é uma **lei** que associa dois conjuntos, onde a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um único elemento do segundo conjunto.
- Uma função é um **instrumento** ou máquina em que colocamos um dado – uma informação ou elemento de um conjunto – e que, sob a ação do instrumento ou máquina, se transforma em resposta, correspondendo a um elemento de outro conjunto.

“Na verdade, as duas maneiras de conceituar função têm significados idênticos. Vamos nos encaminhar pela primeira forma de definição, eis que, a segunda dela decorrerá intuitivamente. Inicialmente devemos refletir a concepção de **lei**. O que é realmente uma **lei**?

O trabalho do cientista é o de observar e descrever os fenômenos e ordenar os resultados da sua observação num quadro explicativo – construção intelectual – coerente, e cujas consequências e previsões sejam confirmadas pela observação e experimentação.

A observação mostra que há certos fenômenos que apresentam regularidades, isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas. A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a repetição e previsão, desde que criem as condições iniciais convenientes; ora repetir e prever é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a natureza” (Conceitos Fundamentais da Matemática, Bento J. Caraça, Lisboa, 1978, p. 119).

Em consequência, dizemos que uma **Lei** é uma relação constante que se observa nos fenômenos ou, mais precisamente, é toda regularidade que podemos observar nos fenômenos.

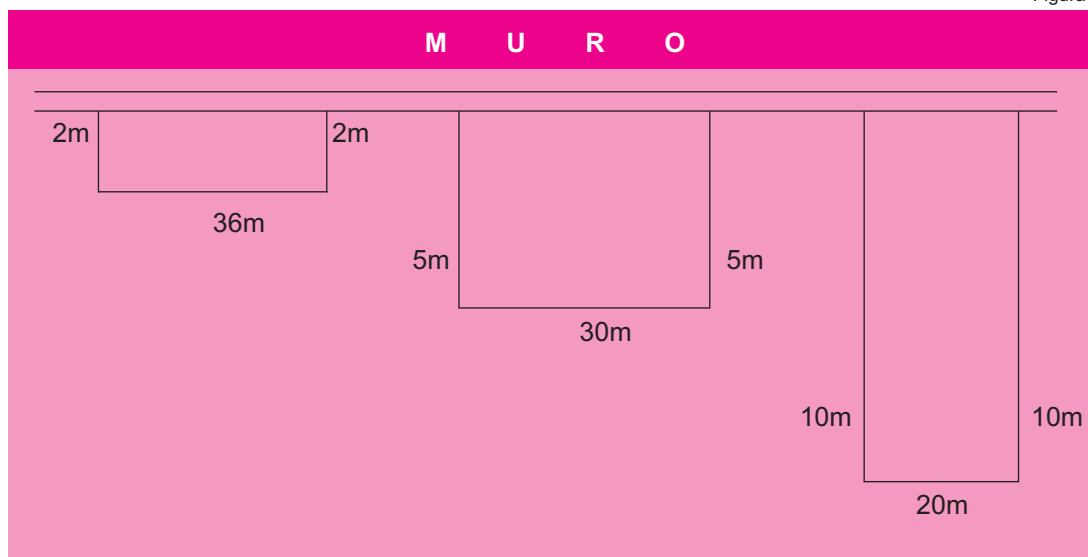
Para melhor compreensão dos alunos, o Professor poderá criar situações como a seguir:

João comprou 40m de tela para que seja utilizada no galinheiro que ele deseja construir aproveitando um dos muros laterais que cercam o seu sítio. O galinheiro terá forma retangular, e como João é Professor de Matemática já aposentado, resolveu fazer algumas simulações sobre as possibilidades de melhor aproveitamento dos 40m de tela de que dispõe.

Veja o procedimento de João.

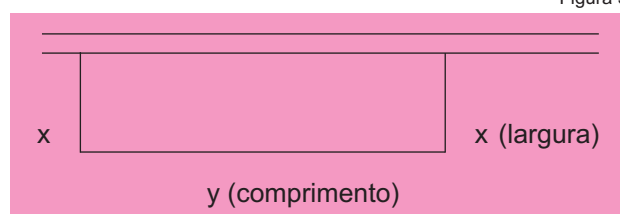
Elaborou os três desenhos como a seguir:

Figura 2



O instinto matemático lhe alertou para outras formas retangulares que poderia elaborar e que, talvez, melhor pudessem atender às suas necessidades. Resolveu então estabelecer uma **lei matemática** para a utilização dos 40 metros de tela. Veja:

Figura 3



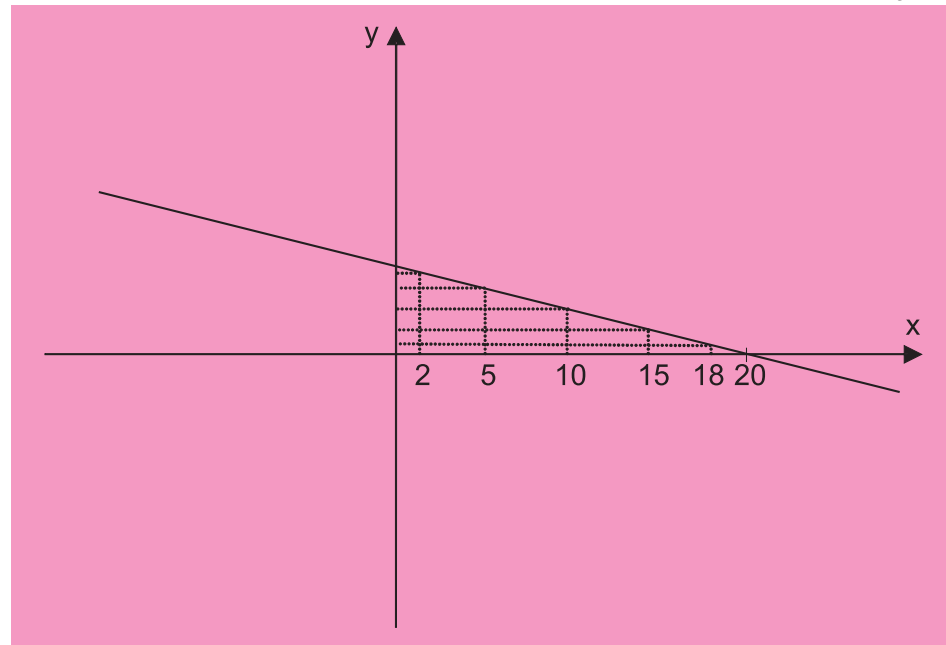
Como os 40m de tela é o limite para o total do perímetro do galinheiro, teremos que:

$x + y + x = 40$ daí $2x + y = 40$ ou então, tomando-se x como **variável independente** e y como **variável dependente**, poderemos escrever que $y = 40 - 2x$. Dessa forma, podemos construir uma tabela onde os valores de y irão depender daqueles atribuídos a x .

Observe a tabela e o gráfico a seguir:

X (metros)	Y (metros)	$y = 40 - 2x$
2	36	
5	30	
7	26	
10	20	
15	10	
20	0	

Figura 4



Observações:

- Cada par de números na tabela corresponderá a um ponto no gráfico; a tabela fornece seis pontos para a construção do gráfico.
- A variável independente x , que corresponde à largura do retângulo, será anotada no **eixo - x** das **abscissas**.
- A variável dependente y , que corresponde ao comprimento do retângulo, será anotada no **eixo - y** das **ordenadas**.

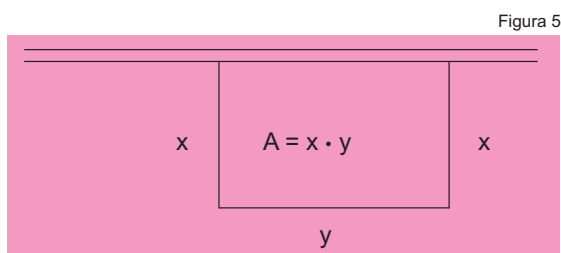
Observando a tabela e o gráfico que a representa, podemos concluir que:

- Temos uma **lei**, dada por $y = 40 - 2x$, que associa elementos do conjunto $A = \{2, 5, 7, 10, 15, 20\}$ a um único elemento do conjunto $B = \{36, 30, 26, 20, 10, 0\}$.
- Os elementos do conjunto A são anotados no **eixo - x** das abscissas, e, os do conjunto B no **eixo - y**, das ordenadas.
- Os elementos do conjunto A são **transformados** em elementos do conjunto B pela expressão $y = 40 - 2x$. Essa **expressão** é o que, quando de nossa definição inicial, chamamos de **lei, máquina** ou **instrumento**.

Nós vimos que na tabela estabelecemos seis pontos representados por seus respectivos pares ordenados, ou coordenados, onde cada par (x, y) determina uma forma de construção do galinheiro; ou seja, a lei que transforma os valores de x para se obter os valores de y , dada por $y = 40 - 2x$, possibilita ao Professor João diversas opções para a construção do seu galinheiro.

Mas esta constatação trouxe ao nosso professor um outro desafio, que ele resolveu também encarar. Quais as dimensões que ele

deveria atribuir a x e a y , a fim de que o seu galinheiro seja o mais espaçoso possível? Para tanto, basta que o Professor João determine uma expressão que lhe forneça a área do galinheiro envolvendo a variável independente x . Observe o procedimento do Professor.



• Note que as dimensões do galinheiro, $x = \text{largura}$ e $y = \text{comprimento}$, devem atender aos 40 metros de tela de que dispõe o Professor para cercá-lo. Daí a expressão $y = 40 - 2x$.

Podemos escrever então que:

Se, $A = x \cdot y$ e $y = 40 - 2x$,

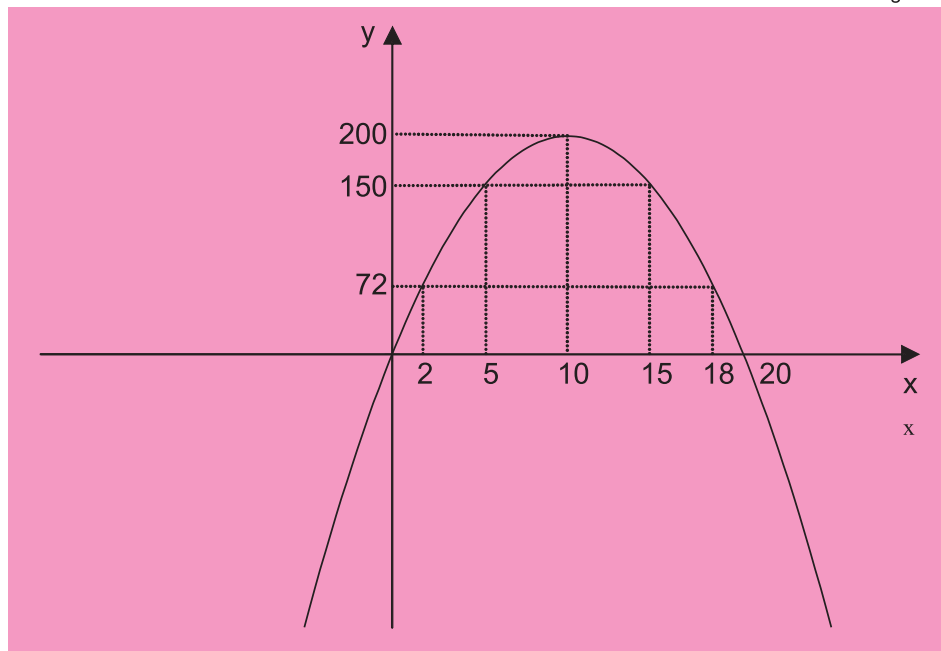
Então $A = x \cdot (40 - 2x)$, daí, $A = 40x - 2x^2$

Estamos agora diante de uma nova **expressão** (lei) onde a variável dependente é representada por A , a área do galinheiro, e a variável independente é x , a dimensão de sua largura. Vamos então construir uma tabela de valores para x que, através da expressão (lei) $A = 40x - 2x^2$ nos fornecerá valores para A ; ou seja, a lei **transformará** os valores de x em valores para A .

Veja a tabela e o gráfico que a representa por meio da **lei de transformação**, $A = 40x - 2x^2$.

x (m)	A (m ²)
0	0
2	72
5	150
10	200
15	150
18	72
20	0

Figura 6



Analisando a tabela e o gráfico verificamos que, considerando os valores escolhidos:

- 1) O maior **espaço** ou **área** do galinheiro do Professor é $A = 200\text{m}^2$
- 2) O valor da abscissa do (eixo - x) que é transformado pela lei $A = 40x - 2x^2$ na ordenada do (eixo - y), $A = 200$ e $x = 10$.
- 3) Temos então que $x = 10\text{m}$ é a dimensão da **largura do galinheiro** e, para sabermos o seu **comprimento** basta substituir este valor de $x = 10$ na expressão $y = 40 - 2x$. Daí, encontramos que a dimensão do comprimento do galinheiro é $y = 20$.
- 4) É fácil verificar que de acordo com a simulação realizada, tomando-se $x = 10\text{cm}$ e $y = 20\text{cm}$ para, respectivamente, as dimensões largura e comprimento, atenderemos ao anseio do Professor João.
 - $2 \cdot x + y = 2 \cdot 10 + 20 = 40$, que corresponde aos 40m de tela que ele tem para com ela cercar o galinheiro.
 - Por outro lado, a maior área possível de ser obtida é $A = 200\text{m}^2$, que corresponde às dimensões de largura e comprimento, dadas por, respectivamente, $x = 10\text{m}$ e $y = 20\text{m}$, porque:
 $A = x \cdot y = 10\text{m} \cdot 20\text{m} \Rightarrow A = 200\text{m}^2$

Conclusão

As medidas que o Professor João deve utilizar na construção de seu galinheiro para usar exatamente 40 metros de tela e obter a maior área possível de 200m^2 , são: a medida da largura igual a 10m e a do comprimento igual a 20.

Antes de enveredarmos para o caminho da abordagem puramente teórica, verificamos que algumas questões não estão ainda suficientemente esclarecidas. Tudo diz respeito ao real conceito de **Função**.

- i) O conceito de Função se resume à definição de uma **expressão analítica** ou **lei**?
- ii) O conceito de Função pode ser definido diretamente pela correspondência entre os valores de **x** e **y**?
- iii) O conceito de Função pode ser definido por meio de sua **representação geométrica** no plano cartesiano?

Insistimos que estas questões devem ser amplamente refletidas e discutidas com os alunos. Não é recomendável que as noções relacionadas com o nível puramente teórico e abstrato sejam logo tratadas sem que o aluno tenha apreendido o verdadeiro e real significado do conceito de Função.

Muitos professores, sem que se apercebam da importância para o aluno das elucidações aqui propostas, escrevem no quadro listas de exercícios ou provas, expressões como **sejam a função $y = x^2$ ou $y = 40 - 2x$** ao invés de, corretamente, assim nos expressarmos **seja a função $y(x)$ definida analiticamente por $y = x^2$ ou $y = 40 - 2x$** .

Vejamos por exemplo **um mapa**. O que um mapa representa?

Na verdade, ao interpretá-lo, lemos no desenho que cada pedaço ou lugar realmente ocupado pelo terreno real é **associado** a um ponto do mapa desenhado numa folha de papel. É esta **associação** que explicita uma **Função** onde o seu **domínio** é a **região geográfica** focada, que tem como **imagem** os pontos do desenho no mapa, ou seja, neste exemplo observamos que:

- i) Temos um conjunto de pontos de uma região geográfica qualquer que chamamos de **domínio**.
- ii) Temos uma **lei** (escala) que **associa** cada **ponto/objeto** do domínio a outros pontos únicos e bem determinados num desenho chamado de mapa.

Nos exemplos anteriores, lidamos com conjuntos numéricos. Note que na construção do galinheiro as variáveis **x** e **y**, respectivamente, representavam a largura e comprimento do galinheiro, tomando valores em conjuntos **A** e **B** distintos, de acordo com seus papéis de variáveis independente e dependente.

No caso da representação no **mapa**, temos **pontos** de uma região geográfica natural que são transformados por uma **lei**, chamada de **escala**, em outros pontos que comporão uma região no papel que será chamada de mapa.

Diante dessas considerações podemos enunciar conclusivamente que:

Sejam dados dois conjuntos quaisquer A e B. Se a cada elemento do conjunto A estiver **associado** de alguma maneira um único elemento do conjunto B, então esta **associação** será chamada de **Função** de A e B.

Assim a **expressão analítica** ou **lei**, em si mesma ou, por si só, não define uma função! É necessário que ela atue sobre os elementos de um conjunto chamado de **domínio** e os **associe**, cada um deles, a apenas **um elemento** de um outro conjunto.

É comum representarmos uma função pelas letras minúsculas **f, g, h**, etc. Se designarmos por **D** o domínio de uma função e, se **x** está no **domínio de f**, então o elemento que vai ser obtido pela **atuação** de **f** em **x** é anotado por **f(x)**, que se lê **f** de **x** ou **f** em **x** e é chamado de **imagem de x**. Agora sim, poderemos, juntos com nossos alunos, nos encaminharmos para os procedimentos mais rigorosamente teóricos.

2. Funções

Professor, neste instante começaremos a parte mais formal do assunto **Funções** e que causa aos alunos dificuldades mais acentuadas, por se tratar do aprofundamento teórico propriamente dito e que requer, na verdade, a utilização do raciocínio abstrato. Por este motivo procuraremos, mesmo sabendo das dificuldades inerentes a esta caminhada, desenvolver este conteúdo da forma mais simples possível.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função F de A em B é uma **regra** que diz como associar a cada elemento **$x \in A$** , um **único $y \in B$** . O elemento y será chamado a imagem de x pela função F e será denotado por **F(x)**, ou seja, **$y = F(x)$** .

A notação **$x \alpha F(x)$** indica que a cada **$x \in A$** é associado o elemento **$F(x) \in B$** . Para indicar que F é uma função de A em B, usaremos uma das seguintes notações:

$$F: A \longrightarrow B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{F} B$$

O conjunto A será chamado de domínio de F, e B de contradomínio. Usaremos também as notações **CD_F** e **D_F** para indicar respectivamente o contradomínio e o domínio da função F. Portanto, quando F é uma função de A em B, temos:

- 1) Domínio de F = **$D_F = A$** .
- 2) Contradomínio de F = **$CD_F = B$** .

A imagem da função F é definida por: Imagem de $F = I_F = \{y \in B; y = F(x) \text{ para algum } x \in A\}$. I_F também é chamado de conjunto de valores da função F .

Se F é uma função de A em B , define-se o gráfico de F como sendo o subconjunto do produto cartesiano $A \times B$: $G_F = \{(x,y) \in A \times B; y = F(x)\}$.

Uma relação R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Às vezes uma função F de A em B é identificada com seu gráfico e é vista como um tipo especial de relação. Neste caso, escreve-se $F = G_F$.

Exemplos:

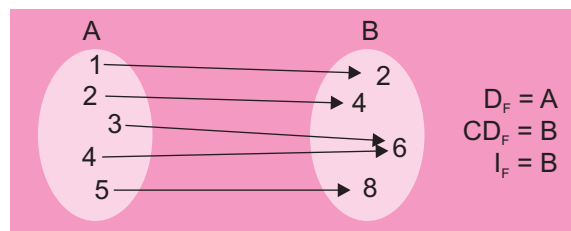
1) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e

$$F = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 8)\}.$$

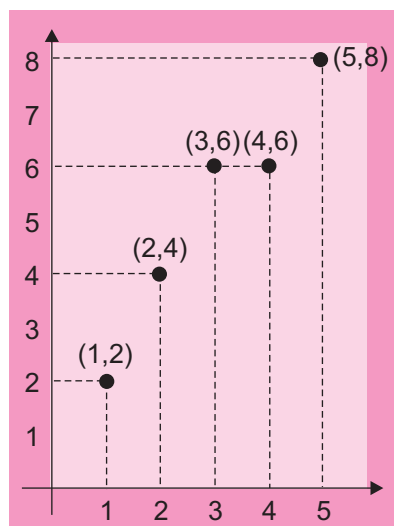
$D_F = A$ e cada elemento de A está relacionado com exatamente um elemento de B . Portanto F é uma função de A em B e temos:

$$F(1) = 2, F(2) = 4, F(3) = 6, F(4) = 6 \text{ e } F(5) = 8.$$

O diagrama de F é o seguinte:



O gráfico de F é o seguinte:



Usando o diagrama, observamos que a definição de função equivale a dizer que de cada elemento do conjunto A deve partir exatamente uma flecha.

Usando o gráfico, observamos que a definição de função equivale a dizer que para cada $x \in A$ a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$ encontra o gráfico de F em um só ponto.

2) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ e

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$$

$R \subset A \times B$, logo R é uma relação de A em B .

Diagrama de R

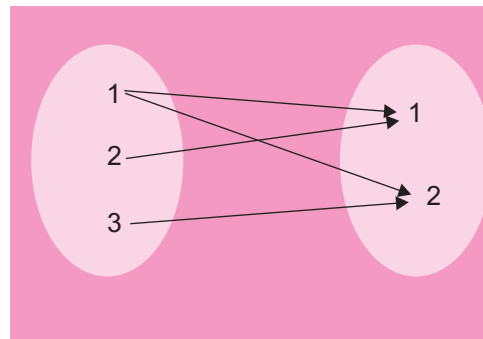
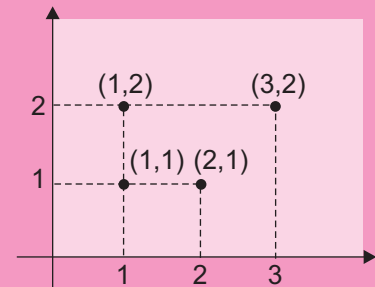


Gráfico de R

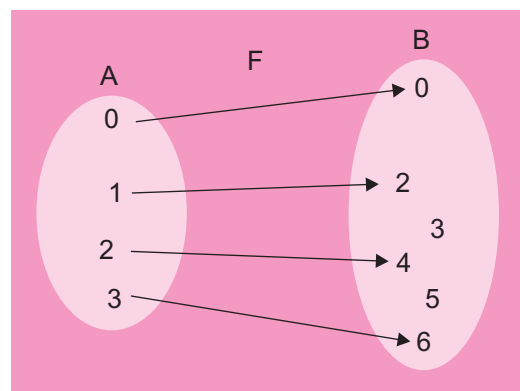


Observando o diagrama, concluímos que R não é uma função de A em B , pois existem duas setas partindo do elemento $1 \in A$.

Vemos também, usando o gráfico de R , que R não é uma função, pois se tomarmos o elemento $1 \in A$, a reta vertical que passa pelo ponto $(1, 0)$ encontra o gráfico de R em dois pontos $(1, 1)$ e $(1, 2)$.

3) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Considere a relação F de A em B dada pelo seguinte diagrama:



$D_F = A$ e, de cada elemento de A , parte uma única flecha, relacionando-o com algum elemento de B . Logo, F é uma função de A em B , em que $F(0) = 0$, $F(1) = 2$, $F(2) = 4$ e $F(3) = 6$.

Observe que F associa a cada elemento $x \in A$ um elemento $y \in B$ tal que $y = 2x$.

Podemos então representar F da seguinte forma:

$$F : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto F(x) = 2x$$

A expressão $F(x) = 2x$ nos permite encontrar a imagem de qualquer elemento do conjunto A , bastando, para isto, multiplicá-lo por dois.

A maioria das funções com as quais trabalharemos serão representadas desta forma, isto é, através de expressões segundo as quais possamos encontrar a imagem de qualquer elemento do seu domínio.

4) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considere a função H de A em B , dada por:

$$H : A \rightarrow B$$

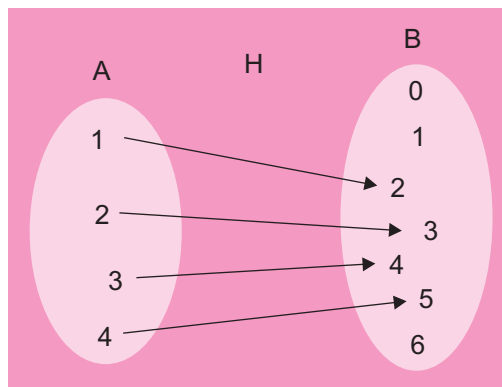
$$x \mapsto H(x) = x + 1$$

Faça o diagrama de H .

Precisamos, portanto, encontrar a imagem de cada elemento x de A , que será dada por $x + 1$.

Daí, $H(1) = 1 + 1 = 2$, $H(2) = 2 + 1 = 3$, $H(3) = 3 + 1 = 4$ e $H(4) = 4 + 1 = 5$.

O diagrama de H será então o seguinte:



2.1 Igualdade de funções

Dadas duas funções f e g de A em B , dizemos que f é igual a g se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplos:

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: A \rightarrow B$

dadas, respectivamente, por $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

Devemos verificar se $f(x) = g(x) \forall x \in A$. Para isto precisamos encontrar as imagens dos elementos de A pelas duas funções:

$$f(1) = 1 - 3 = -2; \quad g(1) = \frac{1^2 - 9}{1 + 3} = \frac{1 - 9}{1 + 3} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$f(2) = 2 - 3 = -1; \quad g(2) = \frac{2^2 - 9}{2 + 3} = \frac{4 - 9}{2 + 3} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$f(3) = 3 - 3 = 0; \quad g(3) = \frac{3^2 - 9}{3 + 3} = \frac{9 - 9}{3 + 3} = \frac{0}{6} = 0$$

Assim, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ e $f(3) = g(3)$ e, portanto, $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$. Concluimos, então, que $f = g$.

2) Sejam $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas respectivamente por

$$f(x) = x \text{ e } g(x) = \sqrt{x^2}.$$

Vemos que se $x < 0$, temos $f(x) \neq g(x)$. Por exemplo, se $x = -2$, temos:

$$f(-2) = -2 \text{ e } g(-2) = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2. \text{ Daí, } f \neq g.$$

2.2 Determinação do domínio de uma função

Definir uma função significa especificar seu **domínio**, seu **contradomínio** e indicar um processo que nos permita determinar a **imagem** de cada x pertencente ao domínio da função.

Entretanto, quando lidamos com funções reais de variável real, isto é, com funções $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $X \subset \mathbb{R}$, é comum definirmos f apenas por uma expressão algébrica em x , ficando subentendido que o domínio X de f é o domínio de existência da expressão algébrica dada, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, isto é, o conjunto dos valores reais de x para os quais as operações indicadas na expressão algébrica dada possam ser efetuadas.

Os principais cuidados que devemos ter são com expressões que aparecem sob radicais de índice par, que não podem ser negativas e com expressões que aparecem em denominadores, as quais não podem ser nulas.

Exemplos:

1) Determinar o domínio

$$X \subset \mathbb{R} \text{ da função } f: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \frac{1}{x}.$$

O único valor de x para o qual a expressão $\frac{1}{x}$ não é definida é $x = 0$. Assim, $D_f = X = \mathbb{R} - \{0\}$.

2) Determinar o domínio $X \subset \mathbb{R}$ da função $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$.

A expressão algébrica $\sqrt{x}$ em $\mathbb{R}$ tem por domínio de existência o conjunto dos números reais não negativos. Assim $D_g = X = \mathbb{R}_+$.

3) Determinar o domínio $X \subset \mathbb{R}$ da função $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$.

Devemos então ter $x - 4 \geq 0$ e $x - 4 \neq 0$, ou seja, $x - 4 > 0$ e daí $x > 4$. Então, $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x > 4\} =]4, +\infty[$.

4) Determinar o domínio $X \subset \mathbb{R}$ da função $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{4}{\sqrt{x-9}}$.

Devemos ter então $\sqrt{x-9} \neq 0$ e $x \geq 0$ isto é, $\sqrt{x} \neq 9$ e $x \geq 0$, ou mais precisamente, $x \neq 81$ e $x \geq 0$. Assim, $D_F = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \text{ e } x \neq 81\} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} - \{81\} = [0, +\infty[- \{81\}$.

5) Determinar o domínio $X \subset \mathbb{R}$ da função $G: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-4}}$.

Devemos ter $x - 3 \geq 0$ e $x - 4 > 0$, isto é $x \geq 3$ e $x > 4$. Assim, $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 3 \text{ e } x > 4\} = \{x \in \mathbb{R}; x > 4\} =]4, +\infty[$.

6) Determinar o domínio $X \subset \mathbb{R}$ da função $H: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Como o índice é ímpar, não temos nenhuma restrição a fazer. Logo, $D_H = \mathbb{R}$.

7) Determinar o domínio $X \subset \mathbb{R}$ da função $P: X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $P(x) = \frac{5}{x^2 + 4}$.

Como $x^2 + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, não temos nenhuma restrição a fazer, e portanto, $D_p = \mathbb{R}$.

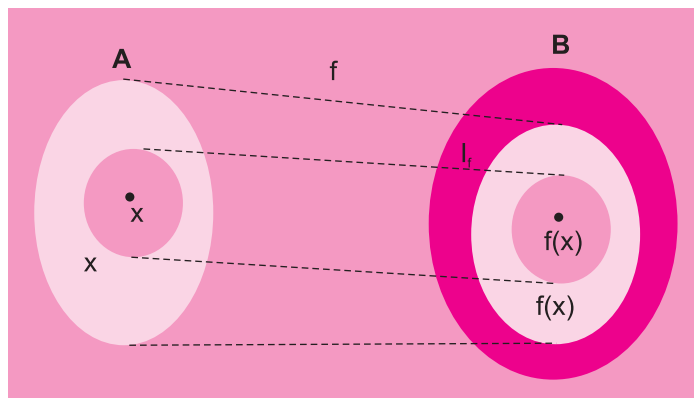
2.3 Imagem direta de um conjunto por uma função

Seja f uma função de A em B e x um subconjunto de A . Chamamos de imagem direta de x por f ou simplesmente imagem de x por f e denotamos por $f(x)$, o subconjunto de B formado pelas imagens dos elementos de x pela função f .

Simbolicamente, temos:

$$f(x) = \{y \in B; y = f(x) \text{ para algum } x \in X\} = \{f(x); x \in X\}.$$

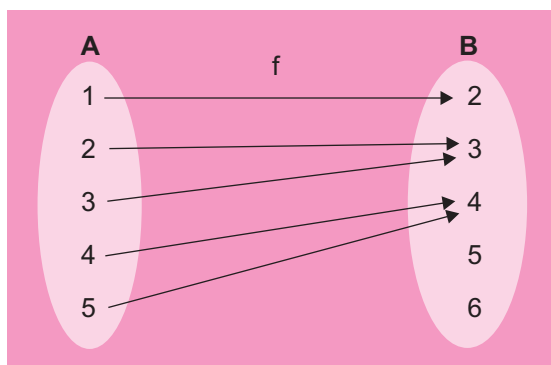
Observe o diagrama



É fácil ver que $f(\emptyset) = \emptyset$ e $f(A) = I_f$.

Exemplo:

1) Seja $f: A \longrightarrow B$ definida pelo seguinte diagrama:



Temos, por ex.: $[f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}]$

$f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{2, 3\}$

$f(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 3\}$

$f(A) = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{2, 3, 4\} = I_f$.

2) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$.

Temos, por exemplo:

$f(\{0, 1, 2, 3\}) = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 2, 5, 10\}$

$f(\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 3\}) = [1, 10]$.

2.4 Funções reais de variável real

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, temos $f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}$.

$y = f(x)$ significa que y é a imagem de x pela função f . Aqui, x representa um elemento genérico do domínio de f (isto é, de A) e y representa a imagem de um tal elemento. Assim, para obtermos todos os pares (x, y) de f , fazemos x assumir todos os valores no con-

junto A e, a partir de cada valor de x , determinamos o valor de y para o qual $(x, y) \in f$.

O valor de y dependerá do modo como a função é definida. Por isto, x é chamado de variável independente ou simplesmente variável e y é chamado de variável dependente. A imagem de f é também chamada de conjunto de valores de f .

Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, a função f terá então variável real e seu conjunto de valores será um subconjunto de $\mathbb{R}$. Neste caso dizemos que f é uma função com valores reais e variável real, ou simplesmente, que f é uma função real de variável real.

As funções reais de variável real são as mais importantes na matemática elementar. Estudaremos detalhadamente alguns tipos particulares destas funções.

2.4.1 Funções crescentes e funções decrescentes

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função real de variável real. Dizemos que f é crescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Por outro lado, se para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$, dizemos que f é decrescente.

Exemplos:

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 10x$. É fácil ver que f é crescente, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow 10x_1 < 10x_2$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$.

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3x$. É fácil ver que f é decrescente, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 > 3x_2$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$.

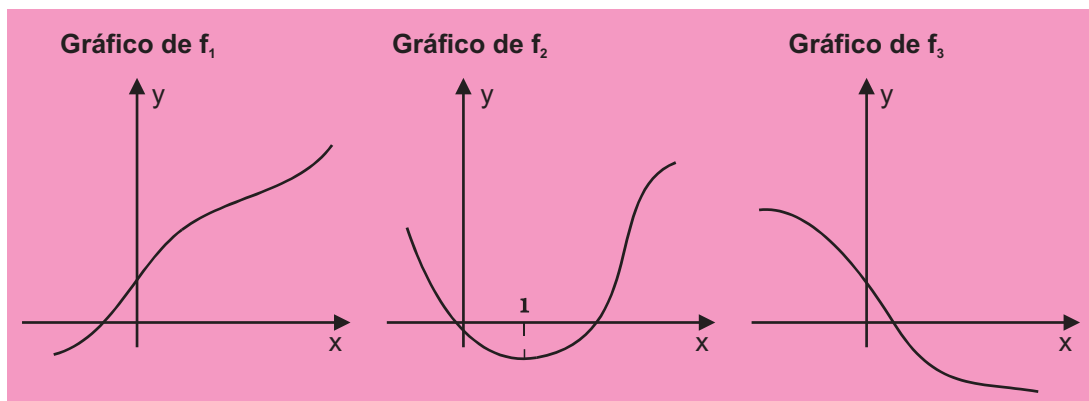
3) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Sejam $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ e $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$.

Se x_1 e x_2 pertencem a $\mathbb{R}_+$, temos: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$.

Se x_1 e x_2 pertencem a $\mathbb{R}_-$, temos: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$.

Assim, f é crescente em $\mathbb{R}_+$ e é decrescente em $\mathbb{R}_-$. Logo, f não é crescente nem tampouco decrescente. Este exemplo mostra que uma função pode ser crescente em certos subconjuntos do seu domínio e decrescente em outros.

4) Considere as funções $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujos gráficos são os seguintes:



Observando os gráficos, vemos que:

- f_1 é crescente
- f_2 é crescente em $[1, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 1]$
- f_3 é decrescente.

2.4.2 Funções pares e funções ímpares

Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é par se $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Se $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$, dizemos que f é ímpar.

Exemplos:

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Logo, } f \text{ é par.}$$

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Logo, } f \text{ é ímpar.}$$

3) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x$.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 4(-x) = 2[-x^3] + 4(-x) = -2x^3 - 4x = -(2x^3 + 4x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Logo, } f \text{ é ímpar.}$$

4) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 + 6x^2$.

$$f(-x) = (-x)^4 + 6(-x)^2 = x^4 + 6x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Logo, } f \text{ é par.}$$

5) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 4$.

$$f(-x) = (-x)^3 + 4 = -x^3 + 4. \text{ Tomando } x = 1, \text{ por exemplo, temos: } f(1) = 1^3 + 4 = 5. \text{ Daí, } -f(1) = -5. f(-1) = (-1)^3 + 4 = -1 + 4 = 3. \text{ Assim, } f(-1) \neq -f(1) \text{ e } f(-1) \neq f(1). \text{ Logo, } f \text{ não é par nem ímpar.}$$

2.4.3 Zeros de uma função

Sejam A e B subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Dada a função $f: A \rightarrow B$, chamamos de zeros de f o conjunto dos

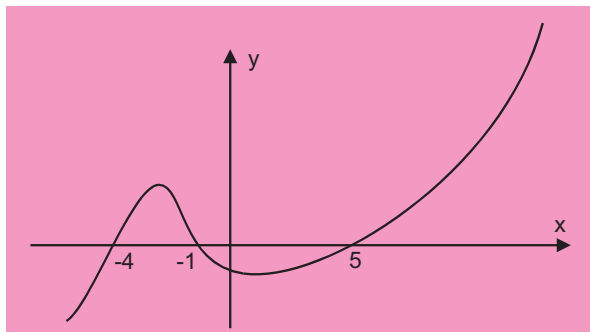
elementos $x \in A$, tais que $f(x) = 0$. Graficamente, os zeros de uma função são as abscissas dos pontos em que o gráfico de f corta o eixo das abscissas.

Exemplos:

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$.

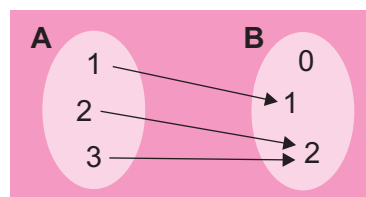
Fazendo $f(x) = 0$, temos $x^2 - 1 = 0$. Portanto, $x^2 = 1$, isto é, $x = \pm 1$. Assim, os zeros de f são -1 e 1 .

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é o seguinte:



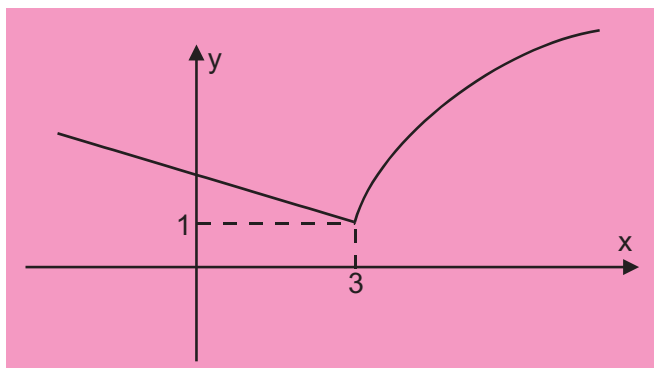
Observando o gráfico, vemos que os zeros de f são -4 , -1 e 5 .

3) Seja $f: A \rightarrow B$ dada pelo diagrama abaixo:



É fácil ver que f não possui zeros, pois $f(1) = 1 \neq 0$; $f(2) = f(3) = 2 \neq 0$ e daí, $f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é o seguinte:



Observando o gráfico, vemos que f não possui zeros, pois seu gráfico não corta o eixo das abscissas.

2.4.4 Sinal de uma função

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Dada uma função $f: A \rightarrow B$, estudar o sinal de f significa encontrar os valores de x para os quais $f(x) < 0$ e os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

Exemplos:

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$.

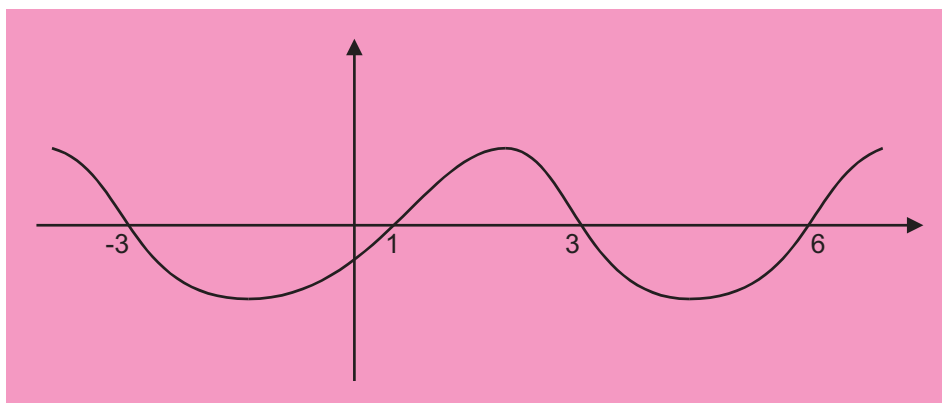
$$f(x) > 0 \Rightarrow 3x + 1 > 0 \Rightarrow 3x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

Daí, f é positiva no intervalo $]-\frac{1}{3}, +\infty[$.

$$f(x) < 0 \Rightarrow 3x + 1 < 0 \Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{3}.$$

Daí, f é negativa no intervalo $]-\infty, -\frac{1}{3}[$.

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é o seguinte:



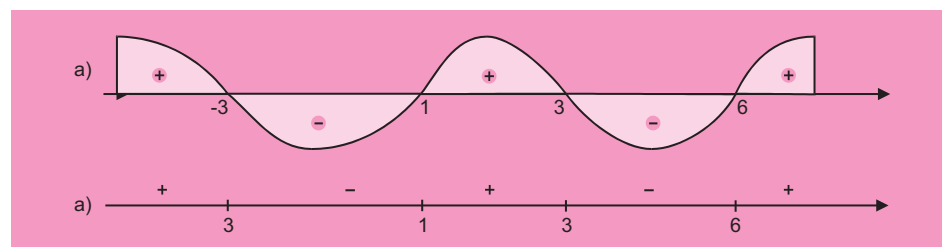
Observando o gráfico da função, vemos que ela será positiva nas abscissas dos pontos em que seu gráfico estiver acima do eixo das abscissas e será negativa nos pontos em que seu gráfico estiver abaixo do eixo das abscissas.

Portanto, neste exemplo, temos

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]1, 3[\cup]6, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 1[\cup]3, 6[.$$

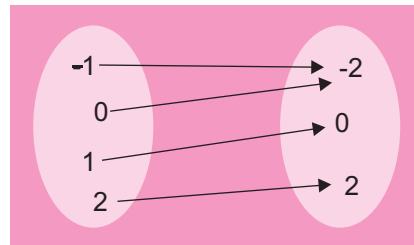
Podemos representar o **sinal de f** de uma das seguintes maneiras:



3) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.

Como $f(x) = x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ tem-se que f é positiva em todo seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$.

4) Seja $f: A \rightarrow B$ definida pelo seguinte diagrama:



Temos então:

a) f é positiva em $\{2\}$, isto é, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \{2\}$.

b) f é negativa em $\{-1, 0\}$, isto é, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}$.

2.5 Alguns tipos particulares de Funções Reais de Variável Real

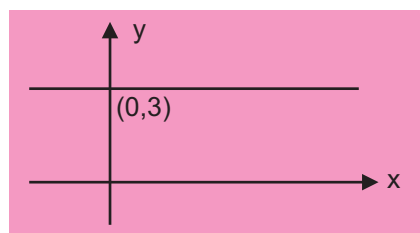
2.5.1 Funções constantes

Sejam A e B subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada **constante**, se todos os elementos de A têm uma mesma imagem, ou seja, se f é definida por $f(x) = c$ para algum $c \in B$.

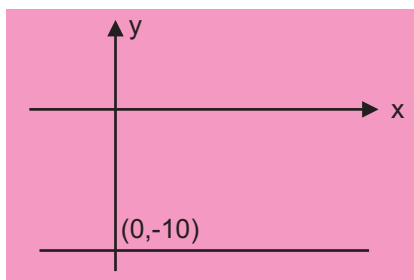
A imagem de f é, portanto, um conjunto unitário. Mais precisamente: $I_f = \{c\}$. O gráfico de f é, portanto, paralelo ao eixo x e passa pelo ponto $(a, c) \forall a \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

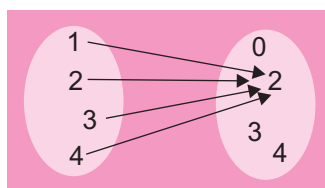
1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3$. Esta função é uma função constante, $I_f = \{3\}$ e seu gráfico é o seguinte:



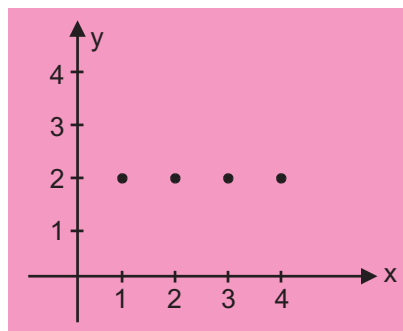
2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -10$. Temos então $I_f = \{-10\}$ e f é uma função constante, cujo gráfico é o seguinte:



3) Seja $f: A \rightarrow B$ definida pelo seguinte diagrama:



Temos $f(x) = 2 \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, f é uma função constante cuja imagem é $I_f = \{2\}$ e cujo gráfico é o seguinte:



Observe que se $f: A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = c$, vale o seguinte:

- i) se $c > 0$, o sinal de f é sempre positivo e f não possui zeros.
- ii) se $c < 0$, o sinal de f é sempre negativo e f também não possui zeros.
- iii) se $c = 0$, f não assume valores negativos nem tampouco positivos e todo elemento de A é um zero de f .

2.5.2 Funções Lineares

Uma função linear é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde a é um número real dado.

O gráfico de f é uma reta que passa pela origem. Para ver isto, considere três pontos quaisquer A , B e C do gráfico de f , dois a dois distintos e sejam (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) as coordenadas de A , B e C respectivamente.

$$(x_1, y_1) \in f \Leftrightarrow y_1 = f(x_1) \Leftrightarrow y_1 = ax_1$$

$$(x_2, y_2) \in f \Leftrightarrow y_2 = f(x_2) \Leftrightarrow y_2 = ax_2$$

$$(x_3, y_3) \in f \Leftrightarrow y_3 = f(x_3) \Leftrightarrow y_3 = ax_3$$

Assim

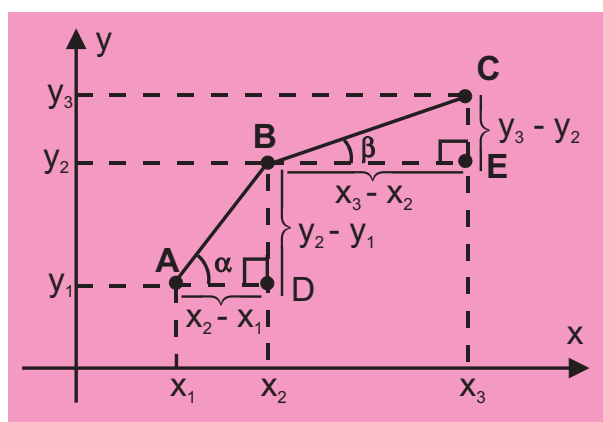
$$y_3 - y_2 = ax_3 - ax_2 = a(x_3 - x_2) \therefore \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$$

$$\text{e } y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Observe que $x_3 - x_2 \neq 0$ e $x_2 - x_1 \neq 0$ pois A, B e C são pontos distintos do gráfico de f e portanto suas abscissas são todas distintas.

$$\text{Temos, então: } \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

No plano cartesiano, temos:



Vamos agora estudar separadamente o caso em que $a = 0$ e o caso em que $a \neq 0$.

a) se $a = 0$

Temos então $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0 \cdot x = 0$. Neste caso, f é uma função constante.

Seu gráfico é, portanto, uma reta horizontal passando pela origem do sistema de coordenadas, pois $f(0) = 0$.

b) se $a \neq 0$

Neste caso, os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais ($\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$), sendo portanto semelhantes.

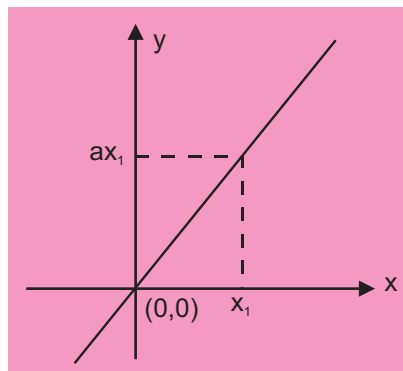
Logo $\alpha = \beta$.

Assim, os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta. Segue-se então que o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) é uma reta e, como $f(0) = a \cdot 0 = 0$ (isto é $(0,0) \in f$), esta reta passa pela origem do sistema de coordenadas.

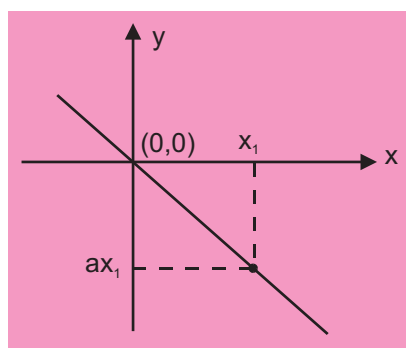
Para determinarmos o gráfico de f , basta então encontrarmos mais um ponto.

Dado $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$ temos $f(x_1) = ax_1$. Logo $(x_1, ax_1) \in f$.

Se $a > 0$, temos $ax_1 > 0$ e o gráfico de f será o seguinte:



Se $a < 0$, temos $ax_1 < 0$ e o gráfico de f será o seguinte:



i) se $a > 0$, f é crescente e se $a < 0$, é decrescente.

Dados x_1 e x_2 pertencentes a $\mathbb{R}$ com $x_1 > x_2$.

Se $a > 0$, $x_1 > x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Logo f é crescente.

Se $a < 0$, $x_1 > x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Logo f é decrescente.

ii) o único zero de f é $x = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pois $a \neq 0$).

iii) Se $a > 0$, o sinal de f é positivo em $]0, +\infty[$ e negativo em $]-\infty, 0[$.

Se $a < 0$, o sinal de f é positivo em $]-\infty, 0[$ e negativo em $]0, +\infty[$.

Se $a > 0$: $f(x) > 0 \Leftrightarrow ax > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (pois $a > 0$). Daí, f é positiva em $]0, +\infty[$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax < 0$ (pois $a > 0$). Daí, f é negativa em $]-\infty, 0[$.

Se $a < 0$: $f(x) > 0 \Leftrightarrow ax > 0 \Leftrightarrow x < 0$ (pois $a < 0$). Daí, f é positiva em $]-\infty, 0[$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax < 0 \Leftrightarrow x > 0$ (pois $a < 0$). Daí, f é negativa em $]0, +\infty[$.

Observe que estas propriedades são facilmente verificadas quando analisamos o gráfico da função f .

Exemplos:

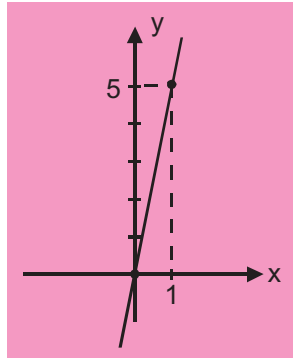
1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x$. f é uma função linear em que $a = 5$.

Então, $(0, 0) \in f$.

Se $x = 1$, então $f(1) = 5$.

Logo, $(1, 5) \in f$.

Daí, o gráfico de f é o seguinte:



Como $a = 5 \neq 0$ temos:

iv) o único zero de f ocorre em $x = 0$. Como $a = 5 > 0$, temos:

a) f é uma função crescente.

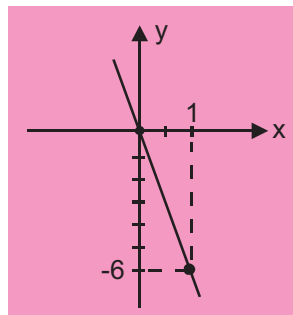
b) f é positiva no intervalo $]0, +\infty[$ e negativa no intervalo $]-\infty, 0[$.

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -6x$.

f é uma função linear em que $a = -6$. Então $(0, 0) \in f$ e se $x = 1$, temos $f(1) = -6 \cdot 1 = -6$.

Daí, $(1, -6) \in f$.

Então, o gráfico de f é o seguinte:



Como $a = -6 \neq 0$, temos:

iv) o único zero de f ocorre em $x = 0$.

Como $a = -6 < 0$, temos

a) f é uma função decrescente

b) f é positiva no intervalo $]-\infty, 0[$ e é negativa no intervalo $]0, +\infty[$.

2.6 Funções do 1º grau

Uma função do 1º grau é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais dados, e $a \neq 0$.

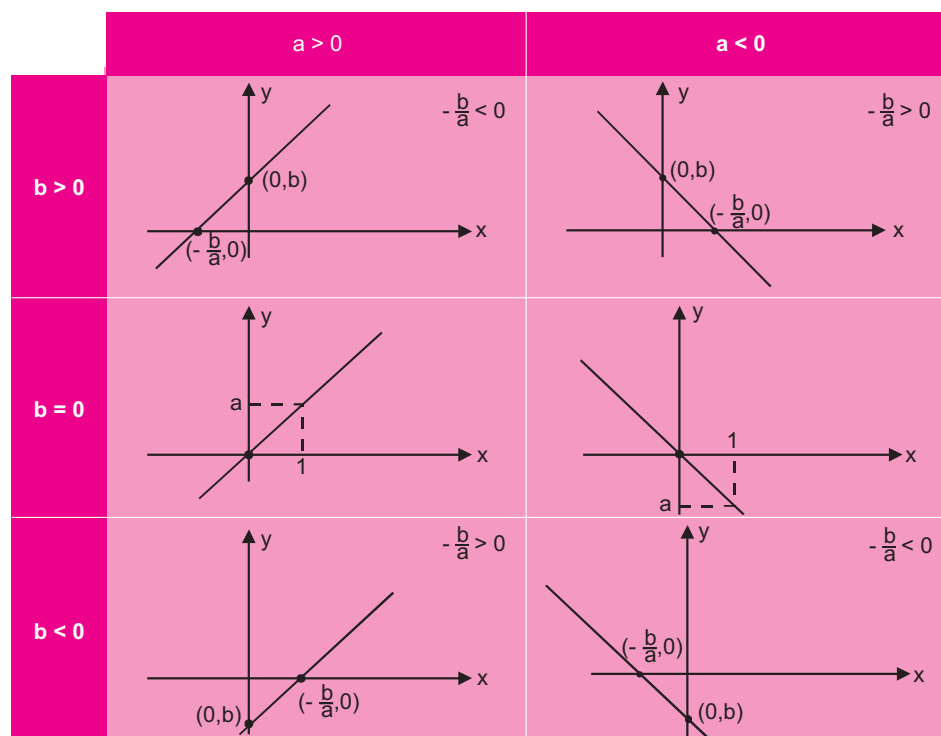
O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta. A prova deste fato é semelhante ao caso das funções lineares. Então, deixamos como exercício.

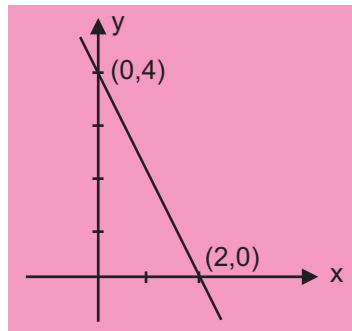
Para determinarmos o gráfico de f , precisamos, então, encontrar dois de seus pontos. Para isto, basta atribuímos dois valores à variável x , por exemplo x_1 e x_2 , e determinarmos suas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$. O gráfico de f será então a reta que passa pelos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Existem entretanto valores de x que determinam pontos importantes do gráfico de f . Por exemplo, se $x = 0$ temos $f(0) = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$. O ponto $(0, b)$ é o ponto em que o gráfico de f corta o eixo y , que é único, pois se trata de uma reta não vertical (caso contrário não representaria o gráfico de uma função).

Como $a \neq 0$, a função f não pode ser constante, e daí seu gráfico não é horizontal. Assim o gráfico de f cortará o eixo x em um único ponto. A abscissa deste ponto corresponderá ao zero da função e sua ordenada será igual a zero. Para determinar a abscissa deste ponto basta então fazer $f(x) = 0$ e daí $ax + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{a}$. Logo o gráfico de f cortará o eixo x no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$. Assim o gráfico de f será a reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$. Observe que, no caso em que $b = 0$, estes pontos coincidem. Mas, por outro lado, teremos $f(x) = ax$ e recairemos no caso em que f é linear.

Assim, teremos as seguintes possibilidades para o gráfico de f :





2.6.1 Outras propriedades das funções do 1º grau

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

i) o único zero da função f ocorre em $x =$.

ii) se $a > 0$, f é crescente e, se $a < 0$, f é decrescente.

iii) se $a > 0$ temos: o sinal de f é positivo no intervalo

$$]- \frac{b}{a}, +\infty[\text{ e é negativo no intervalo }]-\infty, -\frac{b}{a}[$$

$$\text{Se } a < 0 \text{ temos: o sinal de } f \text{ é positivo no intervalo }]-\infty, -\frac{b}{a}[$$

$$\text{e é negativo no intervalo }]-\frac{b}{a}, +\infty[$$

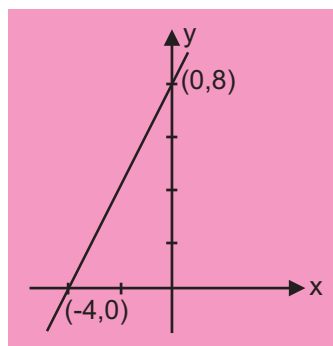
Exemplos:

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 8$.

Temos $a = 2$ e $b = 8$. Daí $(0, b) = (0, 8)$ e

$$(-\frac{b}{a}, 0) = (-\frac{8}{2}, 0) = (-4, 0).$$

O gráfico de f é o seguinte:



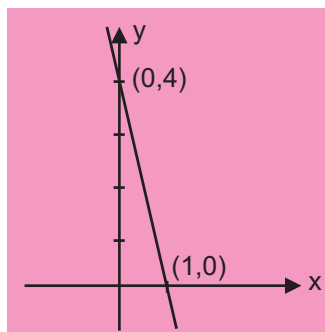
i) f é crescente

ii) f é positivo no intervalo $]-4, +\infty[$ e negativo no intervalo $]-\infty, -4[$

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -4x + 4$.

Temos $a = -4$ e $b = 4$. Daí, $(0, b) = (0, 4)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right) = \left(\frac{-4}{-4}, 0\right) = (1, 0)$.

O gráfico de f é o seguinte:



Como $a = -4 < 0$, temos:

i) f é decrescente

ii) f é positiva no intervalo $]-\infty, 1[$ e é negativa no intervalo $]1, +\infty[$.

2.7 Função do 2º grau

Uma função do 2º grau é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$. As funções do 2º grau são também chamadas de funções quadráticas.

Para um estudo mais detalhado das funções quadráticas vamos escrever a expressão que a representa, em uma forma que nos permita concluir algumas das propriedades do seu gráfico.

Temos então $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(\frac{x^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ (pois $a \neq 0$),

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]; \text{ fazendo } b^2 - 4ac = \Delta, \text{ temos}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \text{ Esta forma de escrever } f(x) \text{ é chamada de forma canônica.}$$

Dado $y \in I$, vamos agora determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ e daí, como } a \neq 0, \frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

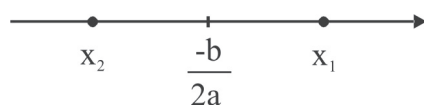
$$\text{Isto implica } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} \text{ e daí devemos ter } \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} \geq 0.$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}}.$$

Logo, os valores de x para os quais $f(x) = y$ são:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}} \text{ e } x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}}.$$

Representando estes pontos na reta, temos:



Assim, qualquer que seja $y \in I_f$, os valores de x para os quais $f(x) = y$ são simétricos em relação à reta $x = -\frac{b}{2a}$. Esta reta é chamada de **eixo de simetria** do gráfico de f .

Para verificarmos se f admite zeros, basta determinar as condições para que $0 \in I_f$. Para isto, fazemos $y = 0$ na expressão

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}}, \text{ obtendo portanto, } -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta < 0$, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \notin \mathbb{R}$. Daí, f não possui zeros reais. Portanto, o gráfico de f não corta o eixo x .

Se $\Delta = 0$, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Daí, f possui um único zero real. Portanto, o gráfico de f corta o eixo x no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$

Se $\Delta > 0$, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ são zeros de f e $x_1 \neq x_2$.

Logo, f possui dois zeros reais. Portanto, o gráfico de f corta o eixo x nos pontos $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$.

Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ e assim obtemos o ponto $(0, c)$, que é o ponto em que o gráfico de f corta o eixo y .

Vamos agora determinar a imagem de f .

Dado $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$y \in I_f \Rightarrow (\exists x) (x \in \mathbb{R} \text{ e } f(x) = y) \Leftrightarrow (\exists x) (x \in \mathbb{R} \text{ e } ax^2 + bx + c = y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \left(x \in \mathbb{R} \text{ e } x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} \geq 0 \right).$$

Portanto, $y \in I_f \Leftrightarrow \left(\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} \geq 0 \right).$

Se tomarmos $y = -\frac{\Delta}{4a}$, temos $\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2} + \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ e daí x

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{0} = -\frac{b}{2a}. \text{ Assim, } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, $-\frac{\Delta}{4a} \in I_f$ e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ pertence ao gráfico de f .

Se $a > 0$, temos:

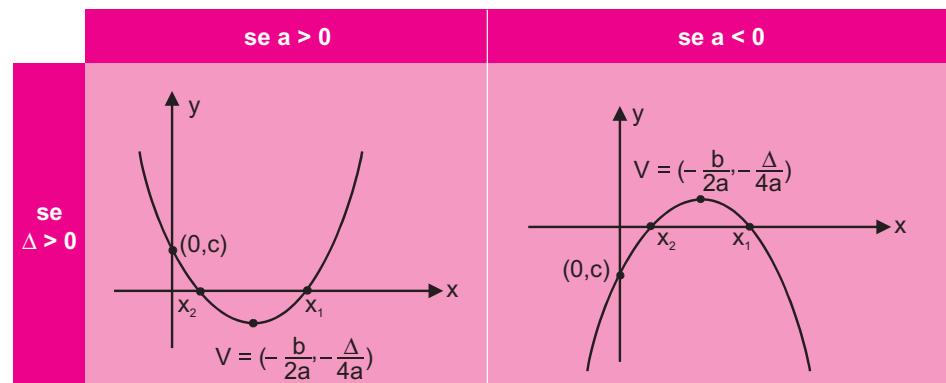
$$y \in I_f \Leftrightarrow \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y}{a} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

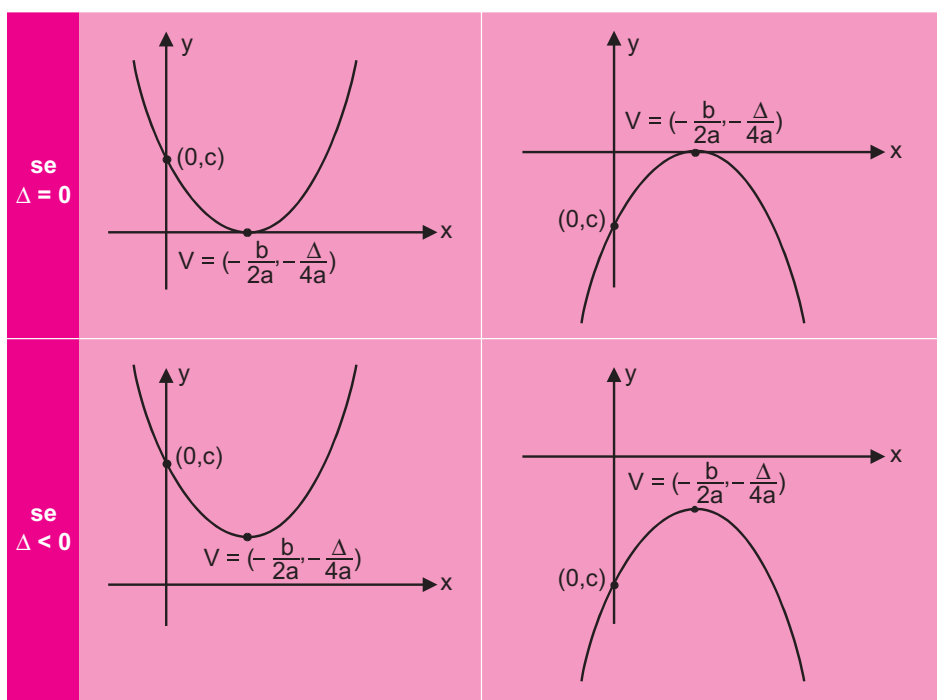
Isto significa que $I_f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ e $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \forall x \in \mathbb{R}$. Como

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, a função assume um mínimo igual a

$$-\frac{\Delta}{4a} \text{ para } x = -\frac{b}{2a}.$$

O gráfico de f é uma parábola, como indicado no quadro abaixo:





O ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado de vértice da parábola.

Vemos que, quando $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e, quando $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

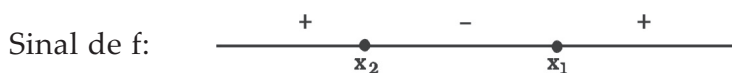
Observe que, quando $\Delta = 0$, o ponto em que o gráfico corta o eixo x coincide com o vértice.

Observando os gráficos vemos que:

- i) se $a > 0$, f é crescente no intervalo $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ e é decrescente no intervalo $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.
- ii) se $a < 0$, f é crescente no intervalo $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

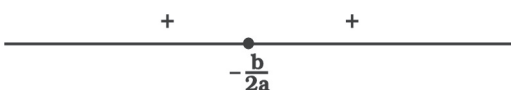
Com relação ao sinal de f , temos:

- i) se $a > 0$ e $\Delta > 0$, o sinal de f é positivo no intervalo $]-\infty, x_2[$ e $x_1, +\infty[$ e é negativo no intervalo $]x_2, x_1[$.



ii) se $a > 0$ e $\Delta = 0$, o sinal de f é positivo no intervalo

$$\left] -\infty, -\frac{b}{2a} \right[\otimes \left] -\frac{b}{2a}, +\infty \right[= \mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}.$$

Sinal de f : 

iii) se $a > 0$ e $\Delta < 0$, o sinal de f é positivo em todo seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$.

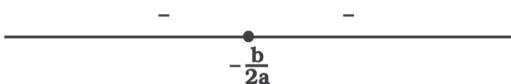
Sinal de f : 

iv) se $a < 0$ e $\Delta > 0$, o sinal de f é positivo no intervalo $]x_1, x_2[$ e negativo no intervalo $] -\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$.

Sinal de f : 

v) se $a < 0$ e $\Delta = 0$, o sinal de f é negativo no intervalo

$$\left] -\infty, -\frac{b}{2a} \right[\otimes \left] -\frac{b}{2a}, +\infty \right[= \mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}.$$

Sinal de f : 

vi) se $a < 0$ e $\Delta < 0$, o sinal de f é negativo em todo seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$.

Sinal de f : 

Temos ainda as seguintes observações:

i) f não é injetiva.

De fato: se $a > 0$, qualquer número real y , tal que $y > -\frac{\Delta}{4a}$ é imagem de dois elementos do domínio de f . Estes elementos são $-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}}$ e $-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2}}$. Se $a < 0$, o mesmo ocorre com qualquer real y tal que $y > -\frac{\Delta}{4a}$.

ii) f não é sobrejetiva.

De fato: se $a > 0$, $I_f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right[$ e $CD_f = \mathbb{R}$. Daí, $CD_f \neq I_f$. Se

$$a < 0, I_f = \left] -\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right] \text{ e } CD_f = \mathbb{R}. \text{ Daí, } CD_f \neq I_f.$$

Exemplos:

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Temos $a = 1 > 0$, $b = -4$ e $c = 3$. Como $a > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0.$$

Como $\Delta > 0$, f tem dois zeros reais. Os zeros de f são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ e}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

O vértice é o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, -\frac{4}{4 \cdot 1} \right) = \left(\frac{4}{2}, -\frac{4}{4} \right) = \left(2, -1 \right).$$

O ponto em que o gráfico corta o eixo y é $(0, c) = (0, 3)$.

Assim, o gráfico de f é o seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$CD_f = \mathbb{R}$$

$$I_f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right] = \left[-1, +\infty \right]$$

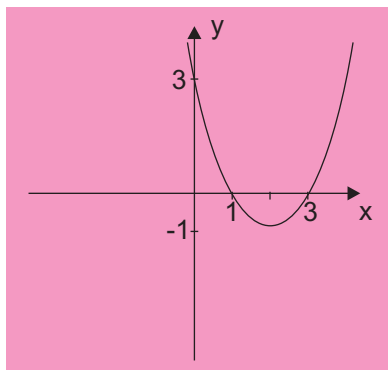
f é crescente em $[2, +\infty[$

f é decrescente em $]-\infty, 2]$

f é positiva em $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

f é negativa em $]1, 3[$.

Sinal de f : $\begin{array}{c} + \quad \quad - \quad \quad + \\ \hline \quad \quad 1 \quad \quad \quad 3 \end{array}$



2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

$$\text{Temos } a = 1 > 0, b = c = 0 \text{ e } \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Como $a > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

Como $\Delta = 0$, f tem um único zero. O zero de f é $x = -\frac{b}{a} = \frac{0}{a} = 0$.

$$\text{O vértice e o ponto } V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(0, 0 \right).$$

O ponto em que o gráfico corta o eixo y é $(0, c) = (0, 0)$.

Temos então o gráfico seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$CD_f = \mathbb{R}$$

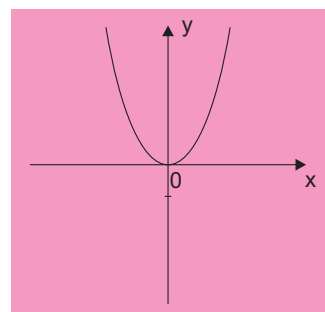
$$I_f = [0, +\infty[$$

f é crescente no intervalo $[0, +\infty[$

f é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$

f é positiva em $\mathbb{R} - \{0\}$

$\exists x$ tal que $f(x) < 0$



Sinal de f : $\begin{array}{c} + \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad 0 \end{array}$

3) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x + 2$.

Temos $a = 1 > 0$, $b = 1$ e $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Como $a > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

Como $\Delta < 0$, f não tem zeros. Logo, o gráfico de f não corta o eixo x .

O vértice é o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{1}{2 \cdot 1}, \frac{-(-7)}{4 \cdot 1} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4} \right)$$

O ponto em que o gráfico corta o eixo y é $(0, c) = (0, 2)$.

O gráfico de f é, então, o seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

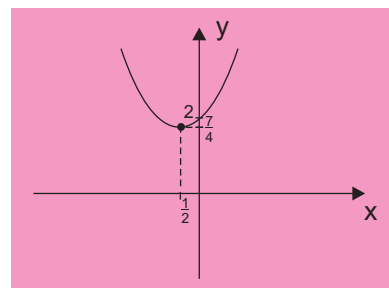
$$CD_f = \mathbb{R}$$

$$I_f = \left[\frac{7}{4}, +\infty \right[$$

f é crescente em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$

f é decrescente em $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$

f é positiva em todo seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$.



Sinal de f : $\begin{array}{c} \qquad \qquad + \\ \hline \end{array}$

4) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Temos $a = -1 < 0$, $b = 6$ e $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 36 - 20 = 16 > 0$$

Como $a < 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

Como $\Delta > 0$, f tem dois zeros reais. Os zeros de f são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 + 4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ e}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 - 4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

O vértice é o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{-6}{2 \cdot (-1)}, \frac{-16}{4 \cdot (-1)} \right) = \left(\frac{-6}{-2}, \frac{-16}{-4} \right) = \left(3, 4 \right)$$

O gráfico de f corta o eixo y no ponto $(0, c) = (0, -5)$.

O gráfico de f é, então, o seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$CD_f = \mathbb{R}$$

$$I_f =]-\infty, 4]$$

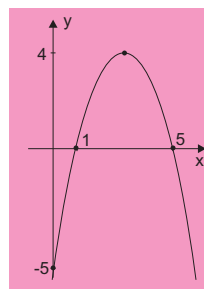
f é crescente no intervalo $]-\infty, 3]$

f é decrescente no intervalo $[3, +\infty[$

f é negativa no intervalo $]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

f é positiva no intervalo $]1, 5[$

Sinal de f : $\begin{array}{c} - \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad \end{array}$



5) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 8x - 16$.

Temos $a = -1 < 0$, $b = 8$ e $c = -16$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-16) = 64 - 64 = 0$$

Como $a < 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

Como $\Delta = 0$, f tem um único zero. O zero de f é

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

$$\text{O vértice é o ponto } V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{-8}{2(-1)}, \frac{-0}{4(-1)} \right) = \left(4, 0 \right)$$

O ponto em que o gráfico corta o eixo y é $(0, c) = (0, -16)$.

O gráfico de f é o seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$CD_f = \mathbb{R}$$

$$I_f =]-\infty, 0]$$

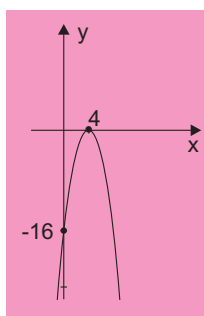
f é crescente no intervalo $]-\infty, 4]$

f é decrescente no intervalo $[4, +\infty[$

f é negativa em $\mathbb{R} - \{0\}$

$\exists x$ tal que $f(x) > 0$

Sinal de f : $\begin{array}{c} - \quad \quad \quad - \\ \hline \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad \end{array}$



6) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 - 1$.

Temos $a = -1 < 0$, $b = 0$ e $c = -1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(-1)(-1) = 0 - 4 = -4 < 0$$

Como $\Delta < 0$, f não tem raiz real. Logo o gráfico de f não corta o eixo x . Como $a < 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

O vértice é o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{0}{2(-1)}, \frac{-(-4)}{4(-1)} \right) = (0, -1)$$

O ponto em que o gráfico corta o eixo y é $(0, c) = (0, -1)$.

O gráfico de f é o seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

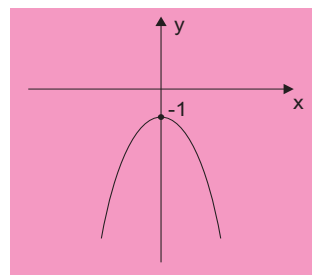
$$CD_f = \mathbb{R}$$

$$I_f =]-\infty, 1]$$

f é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$

f é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$

f é negativa em todo seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$.



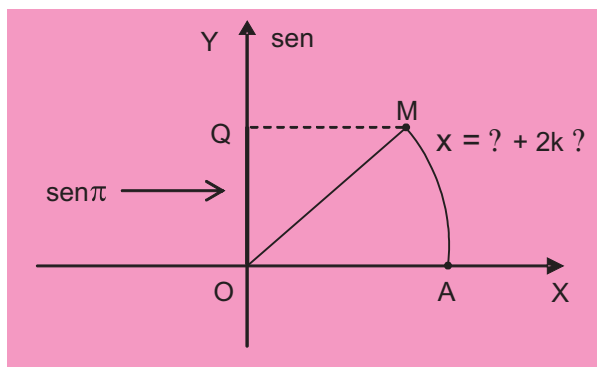
Sinal de f : _____ -

3 Funções Trigonométricas

Consideremos a circunferência centrada na origem $(0,0)$ do sistema cartesiano plano, com raio medindo uma unidade.

3.1 A função seno: $f(x) = \text{sen}x$

Seja M um ponto da circunferência e β o comprimento do arco AM , marcado a partir de A e utilizando o sentido anti-horário, a todo número real β associaremos **um único** número real **$\text{sen}\beta$** , representado pela ordenada do ponto M . Assim definida, temos uma função **f** dos números reais para os reais, chamada **função seno**.



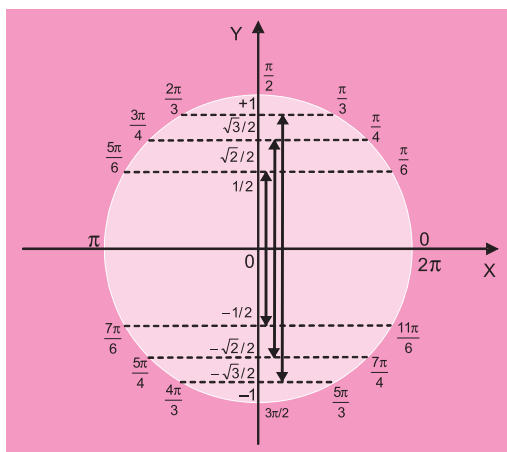
Domínio e Imagem de $f(x) = \text{sen}x$

Em decorrência da definição, podemos afirmar que para todo $x \in \mathbf{R}$ existe $y = \text{sen}x$, daí podemos afirmar que o domínio da função $\text{sen}x$ são todos os reais. Por outro lado, como $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$, qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$, a imagem de $f(x) = \text{sen}x$ é o conjunto $[-1, 1]$. Assim,

$$D_f = (f) = \mathbf{R} \text{ e } I_f = \text{Im}(f) = \{y \in \mathbf{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

Gráfico de $f(x) = \text{sen}x$

Para esboçar o gráfico de $f(x) = \text{sen}x$, veja na circunferência trigonométrica os valores do seno dos arcos notáveis. Lembre-se da redução de arcos ao 1º quadrante para verificar, em módulo, os valores iguais que o seno assume, respeitado o seu sinal em cada quadrante.

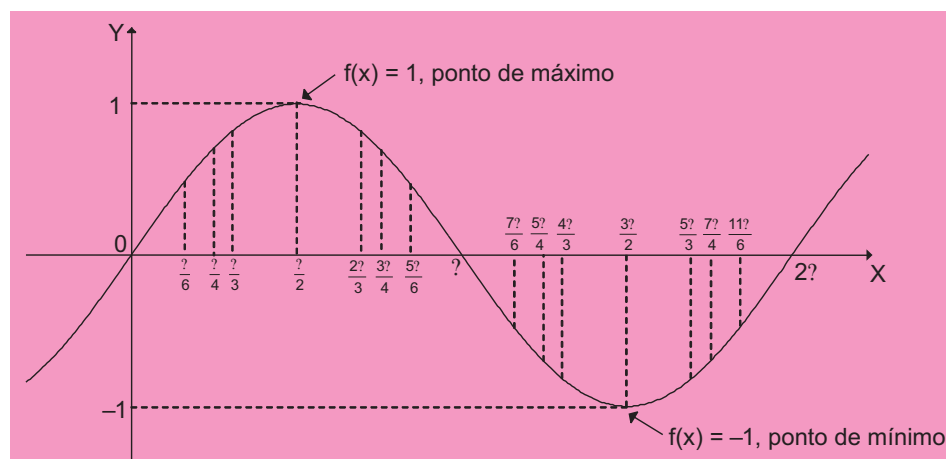


(Estão assinalados, na circunferência acima, os comprimentos de arco).

A partir dos valores dos arcos notáveis anotados na circunferência, podemos construir uma tabela a seguir com valores para os arcos x e seus respectivos $y = \text{sen}x$.

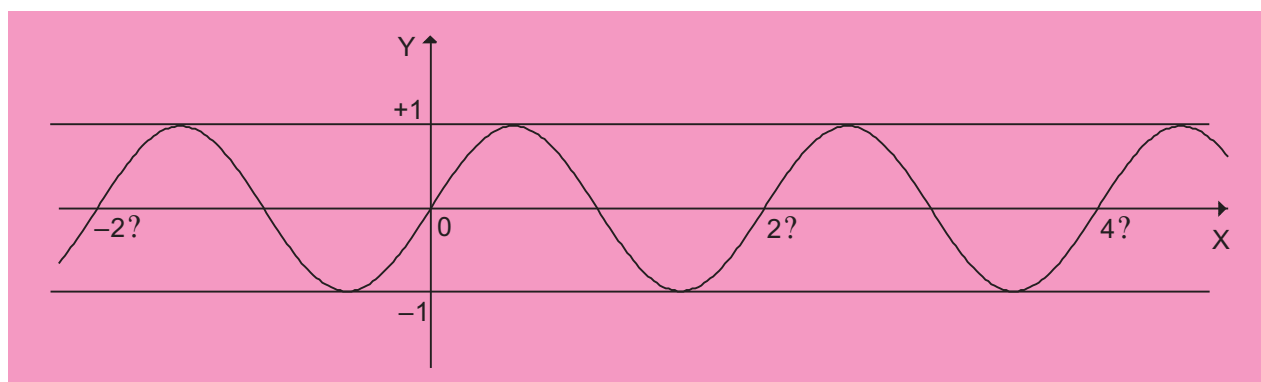
		1º Quadrante				2º Quadrante				3º Quadrante				4º Quadrante				
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
senx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	

A seguir, um esboço do gráfico de $f(x) = \text{sen}x$.



Analisando o gráfico da função seno, podemos destacar as propriedades a seguir.

- i) $f(x) > 0$ e crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- ii) $f(x) > 0$ e decrescente para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.
- iii) $f(x) < 0$ e decrescente para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
- iv) $f(x) < 0$ e crescente para $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.
- v) para $x = \frac{\pi}{2}$ temos $f(x) = 1$, assumindo um ponto de **máximo**.
- vi) para $x = \frac{3\pi}{2}$ temos $f(x) = -1$, assumindo um ponto de **mínimo**.
- vii) A função seno é **periódica**. Veja o gráfico:



Lembre-se de que uma função é dita periódica se, **para todo $x \in D(f)$, existe $\beta > 0$ de tal modo que $f(x + \beta) = f(x)$** . Você vai observar

que, na função seno, β pode assumir mais de um valor. Entretanto, chamaremos de **período** apenas o menor valor positivo de β que atende à condição $f(x + \beta) = f(x)$. Veja por exemplo:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi\right) = \dots$$

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Ou seja, acrescentando um número completo de voltas em torno da circunferência ao arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos, a função seno assume os mesmos valores. De uma maneira geral $f(x) = f(x + 2k\pi)$. O período de $f(x) = \sin x$ não é qualquer valor $2k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$, tal que o seno se repita. O período é o **Menor Valor Positivo** de modo que isso ocorra. No exemplo dado acima $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \dots = f\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$, contudo, o **período** de $f(x)$ não é 4π , 6π , etc., mas o **Menor Valor Positivo** que $2k\pi$ assume, e, isso ocorre quando $k = 1$, e, portanto, o período da função seno é **$p = 2\pi$** .

iii) A função seno é **ímpar**. Basta verificar que $f(-x) = -f(x)$. Observe o exemplo:

$$\bullet \quad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad -f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Portanto, } f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Verifique na circunferência a exatidão do exemplo, conferindo outros exemplos, tais como $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, etc.

Estudo do gráfico de $f(x) = a + b \sin x$

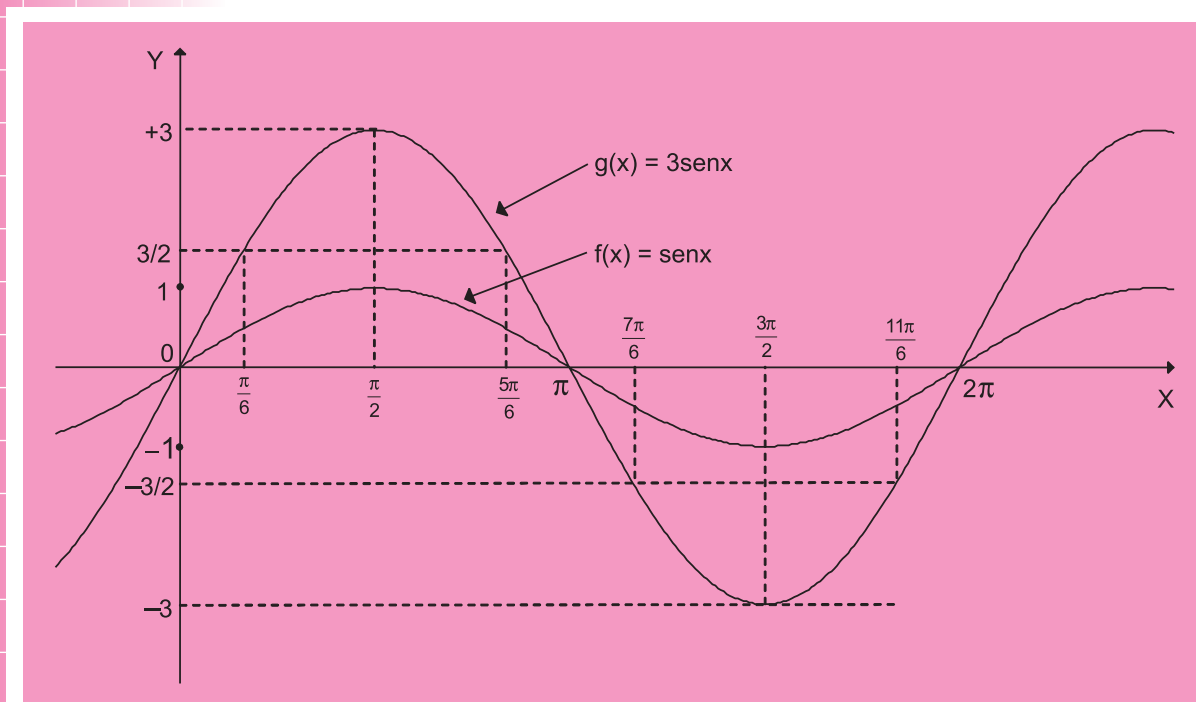
Vamos iniciar fazendo o estudo de dois casos particulares para, em seguida, generalizarmos.

i) $g(x) = 3\text{sen}x$

- Como $\text{sen}x$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$, então $Dg = \mathbf{R}$.
- Sabemos que $-1 \leq \text{sen}x \leq +1$, multiplicando por 3 a desigualdade obteremos: $-3 \leq 3\text{sen}x \leq +3$. Concluimos então que:
 $Ig = \text{Im}(g) = [-3, 3]$
- Observe a tabela a seguir para alguns valores de $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = 3f(x)$

x	$f(x)$	$g(x) = 3f(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$1/2$	$3/2$
$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{7\pi}{6}$	$-1/2$	$-3/2$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
$\frac{11\pi}{6}$	$-1/2$	$-3/2$

- Gráfico de $g(x) = 3\text{sen}x$

**Conclusões**

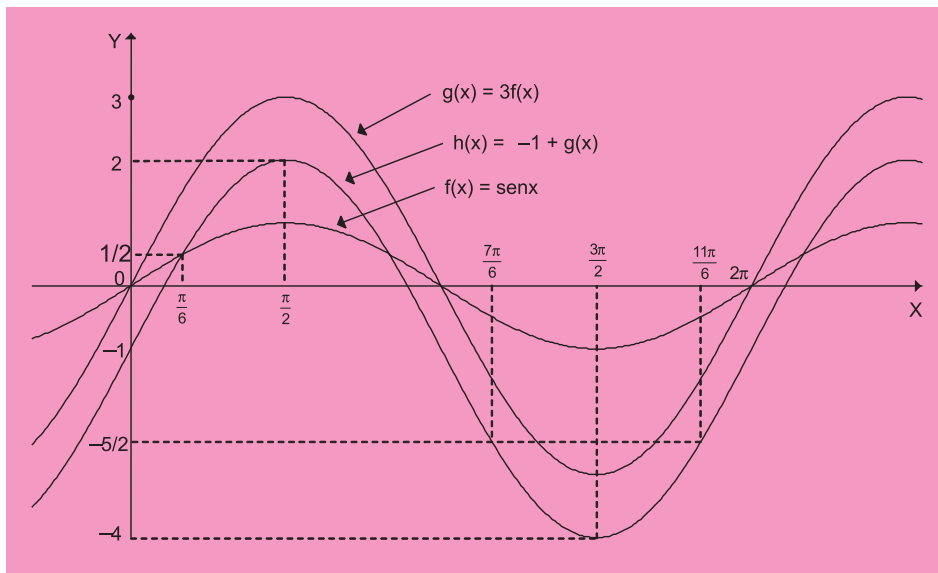
- No gráfico de $g(x) = 3\text{sen}x$, a ordenada de cada ponto da senóide $f(x) = \text{sen}x$ fica multiplicada por 3.
- O período de $g(x)$ é $p = 2\pi$.

ii) $h(x) = -1 + 3\text{sen}x$

- Como $\text{sen}x$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$, então $Dh = \mathbf{R}$
- Sabemos, do exemplo anterior, que:
 $-3 \leq 3\text{sen}x \leq 3$, somando -1 à desigualdade:
 $-1 - 3 \leq -1 + 3\text{sen}x \leq -1 + 3$, que efetuando obtemos:
 $-4 \leq -1 + 3\text{sen}x \leq +2$ ou $-4 \leq h(x) \leq +2$.
 Daí, $I_h = \text{Im}(h) = [-4, +2]$.
- Para a construção do gráfico, vamos elaborar a tabela a seguir com valores para $g(x)$ e $h(x) = -1 + g(x)$.

x	$g(x)$	$h(x) = -1 + g(x)$
0	0	-1
$\frac{\pi}{6}$	$3/2$	$1/2$
$\frac{\pi}{2}$	3	2
$\frac{7\pi}{6}$	$-3/2$	$-5/2$
$\frac{3\pi}{2}$	-3	-4
$\frac{11\pi}{6}$	$-3/2$	$-5/2$

- Gráfico de $h(x) = -1 + g(x) = -1 + 3f(x) = -1 + 3\text{sen}x$



Conclusões

- Observamos, no gráfico de $h(x) = -1 + 3\text{sen}x$, que a ordenada de cada ponto da senoide $f(x) = \text{sen}x$ fica multiplicada por 3, e o resultado subtraído de uma unidade. O período de $h(x)$ é $p = 2\pi$.
- A função $h(x)$ tem um valor **máximo** em $h(x) = 2$, uma unidade **a mais** do máximo de $f(x)$ e uma unidade **a menos** do máximo de $g(x)$.

c) A função $h(x)$ tem um **mínimo** em $h(x) = -4$, enquanto que o gráfico de $g(x)$ atinge um mínimo em $g(x) = -3$, e, o de $f(x)$, faz o mesmo em $f(x) = -1$.

d) Pelos gráficos, observamos que são iguais os períodos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, onde **$p = 2\pi$** . Para qualquer das três funções, teremos:

- $f(x + p) = f(x)$
- $g(x + p) = g(x)$
- $h(x + p) = h(x)$, onde $x \in \mathbf{R}$ e $p = 2\pi$

Generalizando, dada a função **$f(x) = a + b\text{sen}x$** com $b > 0$, podemos concluir que:

- $D_f = \mathbf{R}$ porque existe $\text{sen}x$ para todo **$x \in \mathbf{R}$** .
- Note que **$-1 \leq \text{sen}x \leq 1$** ; multiplicando a desigualdade por **b** podemos escrever: $-b \leq b\text{sen}x \leq b$, e, adicionando **a** obteremos: $a - b \leq a + b\text{sen}x \leq a + b$. Daí, a imagem da função depende de **a** e de **b** e será dada por $I_f = \{y \in \mathbf{R} \mid a - b \leq y \leq a + b\} = [a - b, a + b]$.

Exemplos:

i) $f(x) = -2 + 2\text{sen}x$, $a = -2$, $b = 2$

$$a - b = -2 - 2 = -4$$

$$a + b = -2 + 2 = 0$$

$$I_f = [-4, 0]$$

ii) $f(x) = 1 + 3\text{sen}x$, $a = 1$, $b = 3$

$$a - b = 1 - 3 = -2$$

$$a + b = 1 + 3 = 4$$

$$I_f = [-2, 4]$$

- Usamos o gráfico de $f(x) = \text{sen}x$ para determinar o de $g(x) = a + b\text{sen}x$. A ordenada de cada ponto da **senóide** fica multiplica

da por **b** e adicionada de **a** unidades. Por exemplo, $f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}\frac{\pi}{2}$

e $g(\frac{\pi}{2}) = a + b\text{sen}\frac{\pi}{2}$; daí, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $g(\frac{\pi}{2}) = a + b$. Nos exemplos

anteriores:

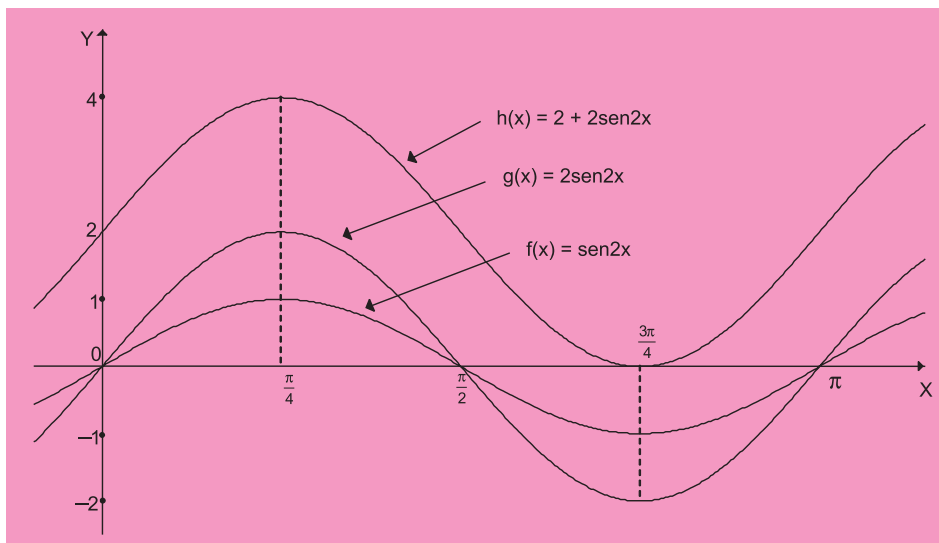
$$\text{i) } f(\frac{\pi}{2}) = -2 + 2 \text{sen}\frac{\pi}{2} = -2 + 2 = 0$$

$$\text{ii) } f(\frac{3\pi}{2}) = 1 + 3\text{sen}\frac{3\pi}{2} = 1 + 3(-1) = -2$$

Vamos agora ao gráfico de **$h(x) = a + b\text{sen}cx$** . Antes, verificaremos como se comportam funções do tipo **$f(x) = \text{sen}cx$** e **$g(x) = b\text{sen}cx$** . Vamos tomar três exemplos e elaborar uma tabela única para as três funções.

i) $f(x) = \text{sen}2x$, ii) $g(x) = 2\text{sen}2x$, iii) $h(x) = 2 + 2\text{sen}2x$

x	f(x)	g(x)	h(x)
0	0	0	2
$\frac{\pi}{4}$	1	2	4
$\frac{\pi}{2}$	0	0	2
$\frac{3\pi}{4}$	-1	-2	0
π	0	0	2



Observe que:

- i) $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = [-1, 1]$ e período $p = \pi$
- ii) $D_g = \mathbf{R}$, $I_g = [-2, 2]$ e período $p = \pi$
- iii) $D_h = \mathbf{R}$, $I_h = [-0, 4]$ e período $p = \pi$

Generalizando, podemos afirmar que:

- $\text{sen} cx$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$; portanto, o domínio de $f(x) = \text{sen} cx$ é $D_f = \mathbf{R}$.
- $-1 \leq \text{sen} cx \leq 1$ ($\text{sen} cx = \pm 1$ para, respectivamente, $x = \pm \frac{\pi}{2c}$); portanto, $I_f = [-1, 1]$.
- O período de $f(x) = \text{sen} 2x$ é $p = \pi$. Note que isto equivale a dizer que $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$. De uma maneira geral se f é dada $f(x) = \text{sen} cx$, $c \neq 0$, $p = \frac{2\pi}{|c|}$, denotando por $|c|$ o módulo de c , o período é sempre $p > 0$.

- Em $g(x) = 2\text{sen}2x$, $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = [-2, 2]$ e $p = p$ e em $h(x) = 2 + 2\text{sen}2x$, $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = [0, 4]$ e $p = \pi$. De uma maneira geral, dada qualquer função da forma $h(x) = a + b\text{sen}cx$, $D(f) = \mathbf{R}$, $p = \frac{2\pi}{|c|}$ e $I(f) = [a - b, a + b]$.

Exemplos:

i) $h(x) = -1 + 3\text{sen}6x$

- $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = [-1 - 3, -1 + 3] = [-4, 2]$
- $p = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

ii) $h(x) = -4 + 2\text{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)$

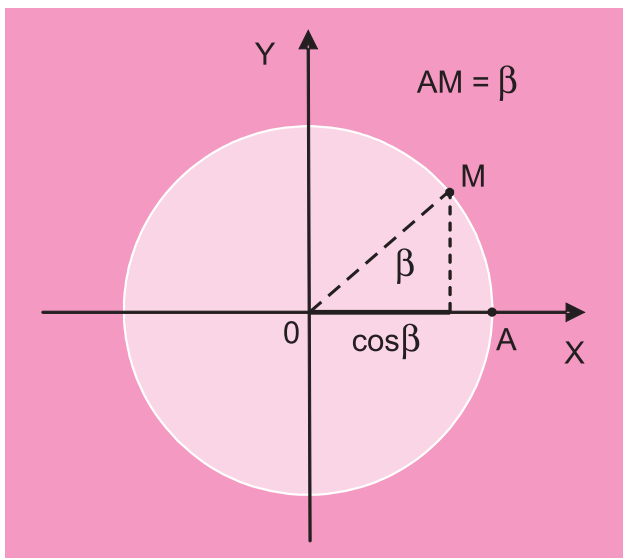
- $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = [-4 - 2, -4 + 2] = [-6, -2]$
- $p = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4p$

iii) $h(x) = 1 + 5\text{sen}(-4x)$

- $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = [-4, 6]$
- $p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

3.2 A função cosseno: $f(x) = \cos x$

Seja M um ponto da circunferência tal que o comprimento do arco AM seja um número real β . Então, a todo número real β associaremos **um único** número real **$\cos\beta$** , representado pela abscissa do ponto M. Dessa forma, teremos uma função bem definida, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ onde $f(\beta) = \cos\beta$, para todo $\beta \in \mathbf{R}$, denominada função cosseno. Veja a figura.



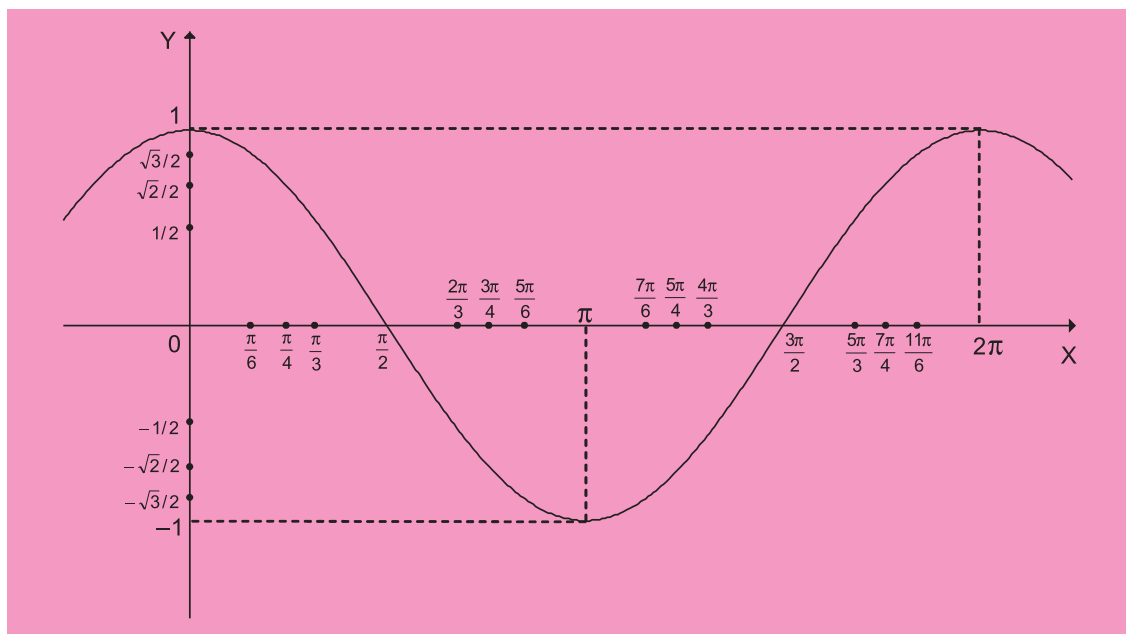
		1º Quadrante				2º Quadrante						3º Quadrante						4º Quadrante					
β	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π						
$\cos\beta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1						

Domínio e Imagem

A exemplo das considerações que fizemos para o seno e tendo em vista a definição dada ao cosseno, concluímos que, para qualquer $x \in \mathbf{R}$ existe um valor para $f(x) = \cos x$. Também, já sabemos que $-1 \leq \cos x \leq 1$; daí, podemos escrever: $D_f = \mathbf{R}$ e $I_f = [-1, 1]$

Gráfico da função $f(x) = \cos x$

A partir do estudo da variação do sinal do cosseno na circunferência e levando em conta os valores de arcos notáveis, podemos elaborar a tabela a seguir.



Analisando o gráfico, podemos distinguir e anotar que:

- i) $D_f = \mathbf{R}$ e $I_f = [-1, 1]$. A função atinge um **máximo** para $x = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ onde $\cos 2k\pi = 1$, e um **mínimo** para $x = \pi$ e $x = \pi(k + 2)$, $k = 1, 3, 5, \dots$ onde $\cos \pi = -1$ e $\cos \pi(k + 2) = -1$

ii) A função é:

- Decrescente e positiva para $0 < x < \frac{\pi}{2}$
- Decrescente e negativa para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
- Crescente e negativa para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
- Crescente e positiva para $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

iii) A função cosseno é par. Basta verificar que $f(-x) = f(x)$. Por exemplo:

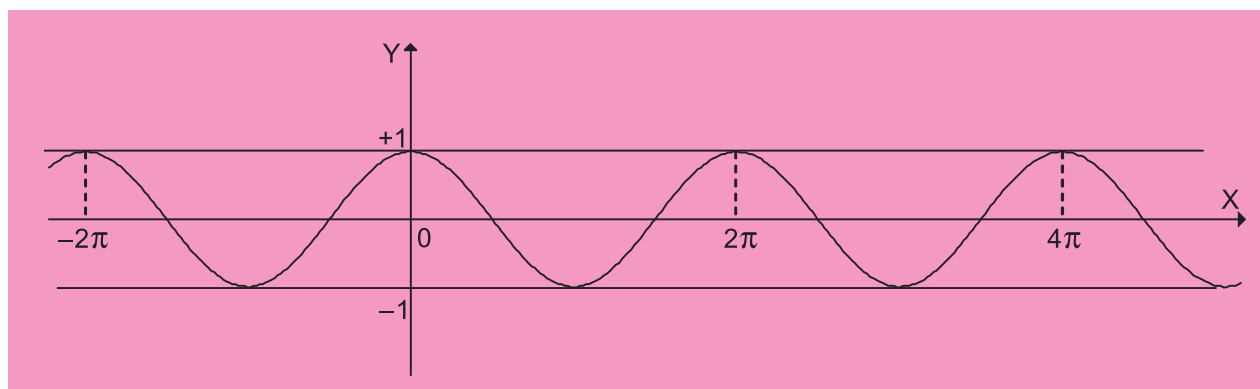
$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2} \text{ e } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right). \text{ Confira outros exemplos.}$$

iv) A função cosseno é periódica. Observe por exemplo que:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \dots = f\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right).$$

considerações que fizemos para a periodicidade da função seno e conclua que o **período** de $f(x) = \cos x$ é **$p = 2\pi$** . Veja o gráfico a seguir.



Uma questão para reflexão e discussão.

- Faça um gráfico de $f(x) = \cos x$ para $-4\pi \leq x \leq 4\pi$.
- No mesmo eixo cartesiano, com linhas tracejadas ou cor diferente, faça um outro gráfico de $f(x) = \sin x$ para $-4\pi \leq x \leq 4\pi$.
- Existe alguma maneira de fazermos os gráficos coincidirem? Deslocando o gráfico da função seno ou cosseno? Para a esquerda? Direita? De quanto?

Exercícios Resolvidos

1. Seja $g(x) = 2\cos x$. Determine:

a) D_g ; b) $I(g)$; c) período de $g(x)$; d) gráfico de $g(x)$.

Solução:

a) $D_g = \mathbf{R}$, uma vez que existe $\cos x$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

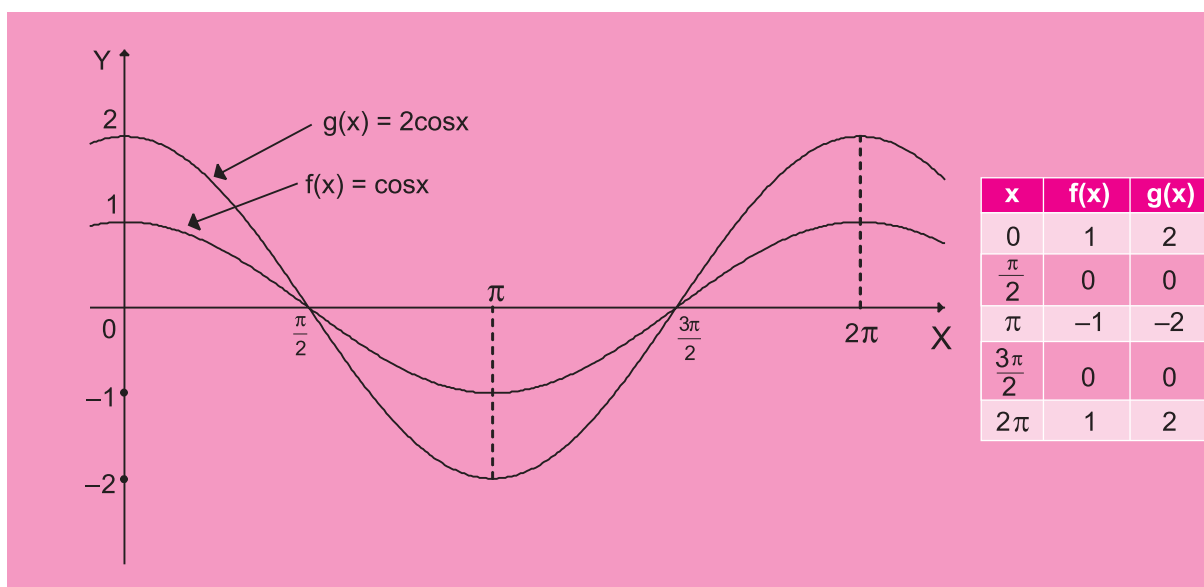
b) Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, então $-2 \leq 2\cos x \leq 2$, logo,

$I_g = \{y \in \mathbf{R} \mid -2 \leq y \leq 2\} = [-2, 2]$.

c) Para o caso do cosseno vale também que o período da função $f(x) = \cos cx$, $c \neq 0$ é $p = \frac{2\pi}{|c|}$. Como $c = 1$ em $g(x) = 2\cos x$, então,

$p = \frac{2\pi}{1}$ daí, $p = 2\pi$.

d) Como no caso do seno, a ordenada de cada ponto de $g(x) = 2\cos x$, é a ordenada de cada ponto da função cosseno multiplicada por dois. Veja os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, a seguir.



2. Seja $h(x) = 2 + 2\cos x$, determinar:

a) D_h ; b) I_h ; c) gráfico e período de $h(x)$.

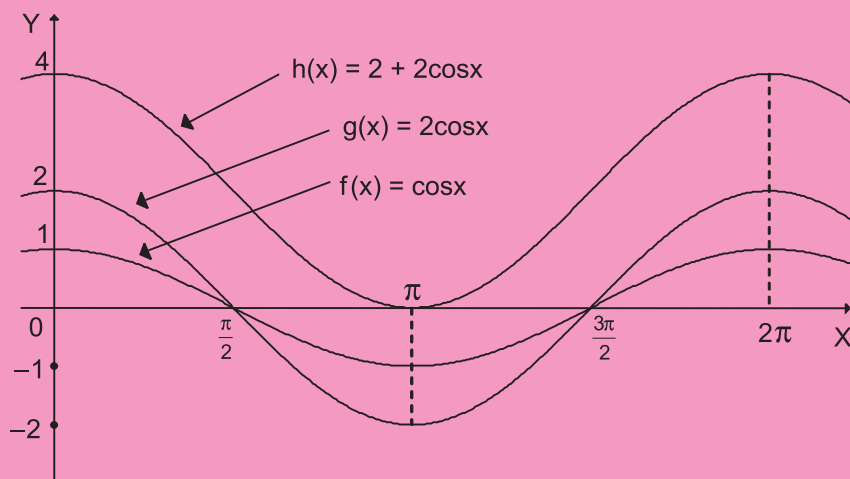
Solução:

É uma função do tipo $h(x) = a + b\cos x$.

a) Como existe $f(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbf{R}$, então, também existe $h(x) = 2 + 2\cos x$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Dessa forma, $D_h = \mathbf{R}$.

b) Como $-2 \leq 2\cos x \leq 2$ (item b, exercício anterior), então $2 - 2 \leq 2 + 2\cos x \leq 2 + 2$ ou $0 \leq 2 + 2\cos x \leq 4$; mais precisamente, $0 \leq h(x) \leq 4$, e, portanto: $I(h) = \{y \in \mathbf{R} \mid 0 \leq y \leq 4\} = [0, 4]$

c) Observe a tabela e os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.



x	f(x)	g(x)	h(x)
0	1	2	4
$\frac{\pi}{2}$	0	0	2
π	-1	-2	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	0	2
2π	1	2	4

Como se observa, o período de $h(x)$ é 2π ; vale também para o cosseno que $p = \frac{2\pi}{|c|}$ ou $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, onde $c = 1$.

3. Seja $h(x) = 1 + 3\cos 2x$, determinar:

a) D_h ; b) I_h ; c) gráfico e período de h .

Solução:

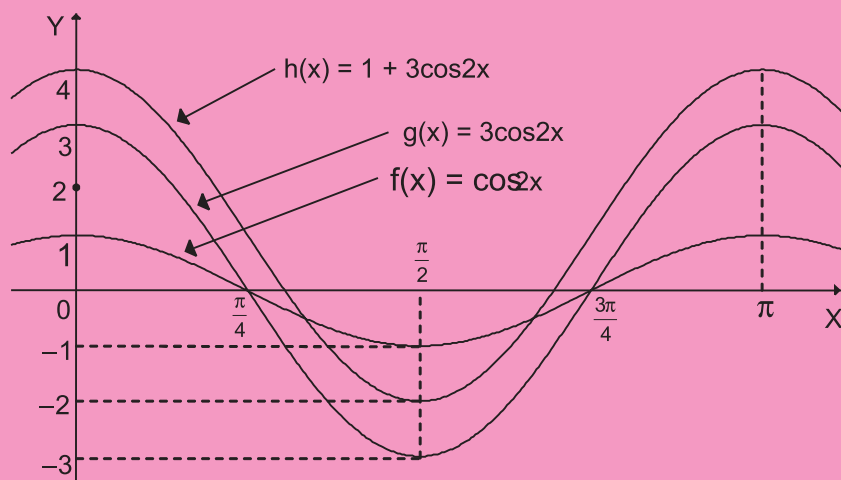
a) $D_f = \mathbf{R}$; para todo $x \in \mathbf{R}$ existe $h(x)$

b) Temos que $1 - 3 \leq 1 + 3\cos 2x \leq 1 + 3$, efetuando, $-2 \leq h(x) = 1 + 3\cos 2x \leq 4$ e, portanto, $I(h) = \{y \in \mathbf{R} \mid -2 \leq y \leq 4\} = [-2, 4]$.

c) Observe a tabela e os gráficos, a seguir, das funções $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = 3\cos 2x$ e $h(x) = 1 + 3\cos 2x$. Mais uma vez constatamos

que o período de $h(x)$ é $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, pois $c = 2$, como também

$p = \pi$ para $f(x)$ e $g(x)$.



x	f(x)	g(x)	h(x)
0	1	3	4
$\frac{\pi}{4}$	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	-1	-3	-2
$\frac{3\pi}{4}$	0	0	1
π	1	3	4

Conclusões finais

i) O período de $f(x) = \cos x$ é $p = 2\pi$. Uma função do tipo $g(x) = \cos(cx)$,

$$c \in \mathbf{R}^*, \text{ terá seu período dado por } p = \frac{2\pi}{|c|}.$$

ii) Dada uma função da forma $h(x) = a + b \cos cx$ temos que:

- $D_h = \mathbf{R}$
- $I_h = \{y \in \mathbf{R} \mid a - b \leq y \leq a + b\}$ ou $I_h = [a - b, a + b]$
- O período de $h(x)$ é dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$

3.3 A função tangente: $f(x) = \operatorname{tg} x$

Se x é tal que $\cos x \neq 0$, define-se a função tangente de x , $\operatorname{tg} x$,

$$\text{por } f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Dos estudos anteriores que fizemos acerca das funções seno e cosseno, podemos destacar:

i) Como $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, então deveremos ter $\cos x \neq 0$, e, em

consequência $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dots$ ou seja, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Dessa forma, o gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$ não pode tocar ou interceptar as retas verticais $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ii) Temos: $f(\pi + x) = \operatorname{tg}(\pi + x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = f(x)$.

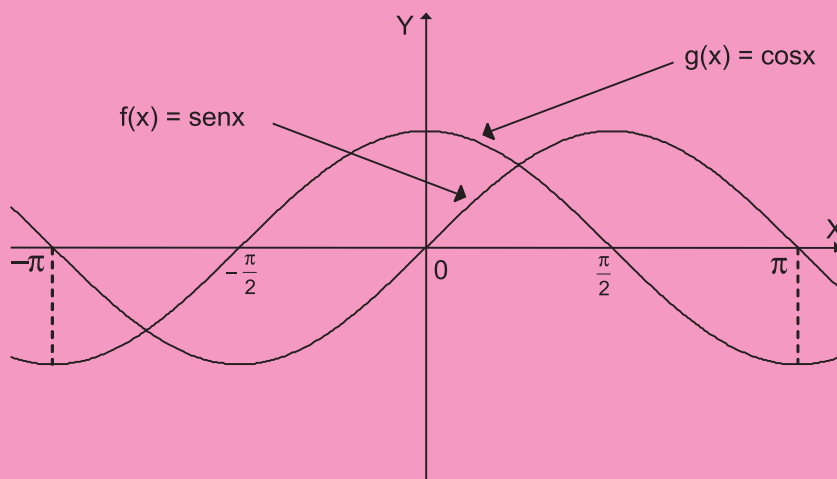
Dessa forma, $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$ ou seja $f(\pi + x) = f(x)$. Como π é o menor número real positivo tal que $f(\pi + x) = f(x)$, o período de $f(x) = \operatorname{tg} x$ é $p = \pi$. A consequência deste fato é que precisamos discutir a tangente apenas em qualquer intervalo de números reais cujo comprimento seja π ; utilizaremos o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

iii) Com relação aos gráficos de $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, note que:

- Se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, temos $\operatorname{sen} x < 0$ e $\cos x > 0$, daí $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < 0$
- Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0$, daí $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} > 0$
- Se $x = 0$, temos $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = 1$, daí $\operatorname{tg} x = 0$

- Se $x = \frac{\pi}{2}$, temos $\text{sen } x = 1$ e $\text{cos } x = 0$, daí $\text{tg } x$ não está definida para $x = \frac{\pi}{2}$. Observe na figura a seguir que quando x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ vemos que $\text{sen } x$ se aproxima de 1, e, $\text{cos } x$ se aproxima de zero, assumindo sempre valores positivos. A partir deste raciocínio, podemos concluir que quando x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, $x < \frac{\pi}{2}$, $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ cresce indefinidamente.
- Se $x = -\frac{\pi}{2}$, a exemplo do caso anterior, $\text{tg } x$ não está definida pois $\text{cos}(-\frac{\pi}{2}) = 0$, quando x se aproxima de $-\frac{\pi}{2}$, $x > -\frac{\pi}{2}$, $\text{sen } x$ se aproxima de -1 e $\text{cos } x$ se aproxima de zero, e $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ decresce indefinidamente.

Verifique as considerações no gráfico de $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{cos } x$.

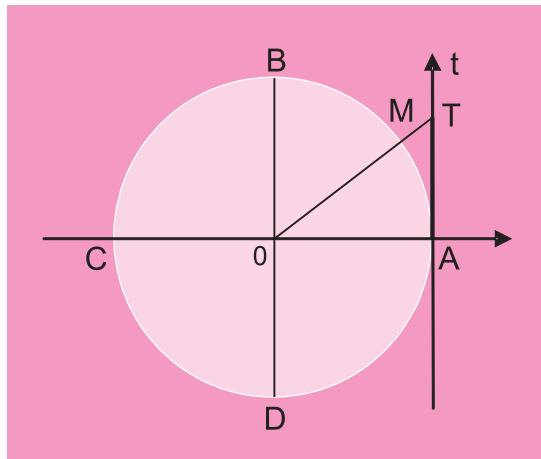
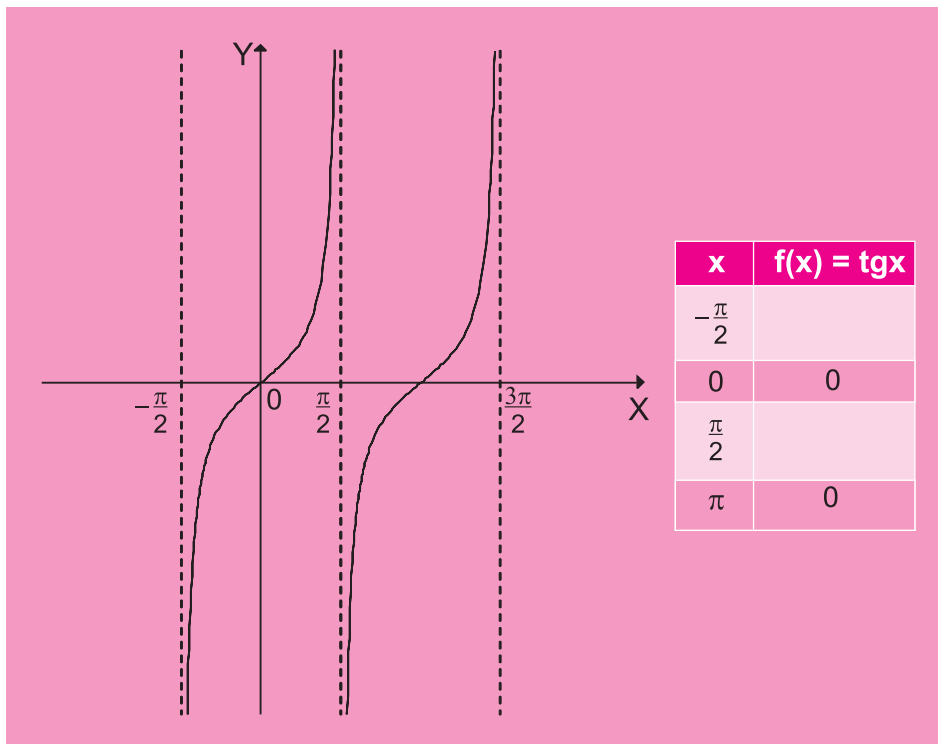


x	f(x)	g(x)
$-\pi$	0	-1
$-\frac{\pi}{2}$	-1	0
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

Gráfico de $f(x) = \text{tg } x$

Antes de apresentarmos o gráfico da tangente, convém relembrarmos o estudo da variação dessa função trigonométrica.

Observe na figura a seguir que, quando $M = B$ ou $M = D$, a reta $\overrightarrow{OM}$ coincide com o eixo dos senos sendo, portanto, paralela à reta t , eixo das tangentes, sendo assim impossível marcarmos um ponto T que determinaria a tangente do arco AM . Veja o gráfico da tangente a seguir, no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.



Note no círculo trigonométrico e confirme no gráfico da tangente, que **não existe tangente** para arcos de comprimentos iguais a

número ímpar de vezes de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Mais precisamente, se

$AM = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}, \pm \frac{9\pi}{2}, \dots$ Não existe tangente do arco AM.

A condição de existência de $f(x) = \text{tg } x$ será, portanto:

Se $AM \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, então existe $\text{tg } AM$

Podemos, então, concluir que dada $f(x) = \text{tg } x$

$$D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$I_f = \mathbf{R}$$

Exercícios Resolvidos

1. Estabeleça a condição de existência das funções:

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Solução: para que $f(x)$ exista, necessariamente, devemos ter

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq \frac{\pi}{2} (2k + 1); \text{ desenvolvendo } \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq \frac{\pi}{2} (2k + 1) \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$(2k + 1), \text{ ou ainda, } x \neq \frac{\pi}{2} [1 + (2k + 1)] = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 2) = (k + 1)\pi.$$

Dessa maneira, somente existe $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ para $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 2) = (k + 1)\pi$, ou seja $x \neq j\pi$, onde j é inteiro.

Note que:

- $f(x) = \operatorname{tg} x$ não existe para arcos de comprimentos iguais a um número ímpar de vezes de $\frac{\pi}{2}$ radianos.
- O número $(2k + 2)$, $k \in \mathbf{Z}$, é par, portanto, $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ não existe para arcos de comprimentos iguais a um número par de vezes de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

b) $f(x) = \operatorname{tg}(x + 2\pi)$

Solução: como no exercício anterior, devemos ter:

$$x + 2\pi \neq \frac{\pi}{2} (2k + 1) \text{ logo } x \neq \frac{\pi}{2} (2k + 1) - 2\pi = \frac{\pi}{2} (2k + 1) - \frac{4\pi}{2}, \text{ ou ainda,}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} [(2k + 1) - 4] \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} (2k - 3). \text{ Note que } f(x) = \operatorname{tg}(x + 2\pi) \text{ não existe para arcos de comprimentos iguais a um número ímpar de vezes } \frac{\pi}{2} \text{ radianos, uma vez que o número } (2k - 3), k \in \mathbf{Z}, \text{ é ímpar, e da condição necessária } x \neq \frac{\pi}{2} (2k - 3).$$

2. Resolva as equações:

a) $\operatorname{tg} x = 1$ e b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solução: a) Observe no círculo trigonométrico:

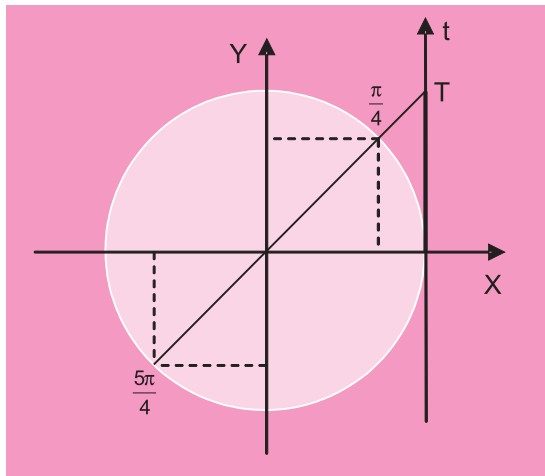
Note que $\operatorname{tg} x = 1$ para $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$ porque:

$$\bullet \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}}{\cos \frac{5\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1$$

Portanto, mais geralmente, $\operatorname{tg} x = 1$ para:

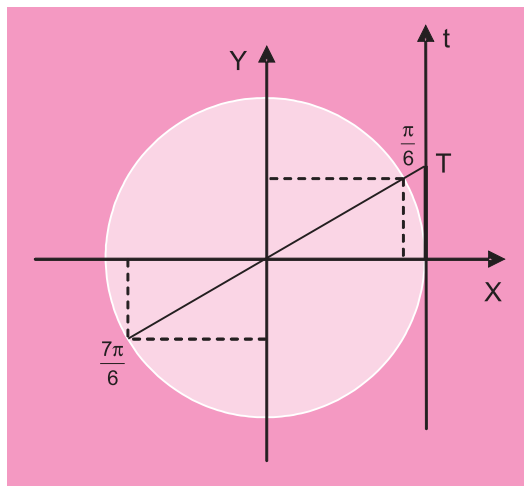
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou,} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \pi(2k+1) \end{cases}$$



Note que $2k$ é um número par, e, $2k+1$ é um número ímpar. Dessa forma, se $\operatorname{tg} x = 1$ para $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e para $x = \frac{\pi}{4} + \pi(2k+1)$, podemos generalizar:

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ para todo } x = \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbb{Z} \text{ (par ou ímpar)}$$

b) Observe no círculo trigonométrico:



Como $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ então $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ logo, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ para:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou,} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

De uma maneira geral, podemos afirmar que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ para } x = \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Exercícios Propostos

- Seja $g(x) = 3\cos x$. Determine:
 - $D(g)$;
 - $I(g)$;
 - o período de $g(x)$;
 - o gráfico de $g(x)$.
- Seja $h(x) = 1 + 3\cos x$, determine:
 - $D(h)$;
 - $I(h)$;
 - o gráfico e o período de $h(x)$.
- Estabeleça a condição de existência das funções:
 - $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$
 - $g(x) = \operatorname{tg}(x - \pi)$
- Resolva as equações:
 - $\operatorname{tg} x = -1$
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
- No círculo trigonométrico da página 69, mostre que a medida do segmento orientado AT é igual à tangente do arco AM.

4. Função Exponencial

Você já aprendeu a resolver uma equação exponencial. Lembremos que dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ ($a > 0$) e $x \in \mathbb{R}$, então a^x é real e único. Esta condição fica melhor entendida quando definimos função exponencial.

4.1 Definição, Gráficos e Propriedades

Seja $0 < a \neq 1$, denominamos de **Função Exponencial** na base a , a função que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $a^x \in \mathbb{R}$, isto é, a função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$.

Vamos construir o gráfico de duas funções exponenciais para depois inferir sobre o comportamento geral dessas funções.

Exemplo

Construir o gráfico de $f(x) = 2^x$.

Observe que $D_f = \mathbb{R}$. Não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$ que não possa ser associado a 2^x . Determinemos algumas imagens para valores de x , e façamos o gráfico cartesiano de f .

$$x = -3 \rightarrow f(-3) = 2^{-3} = 1/8$$

$$x = -2 \rightarrow f(-2) = 2^{-2} = 1/4$$

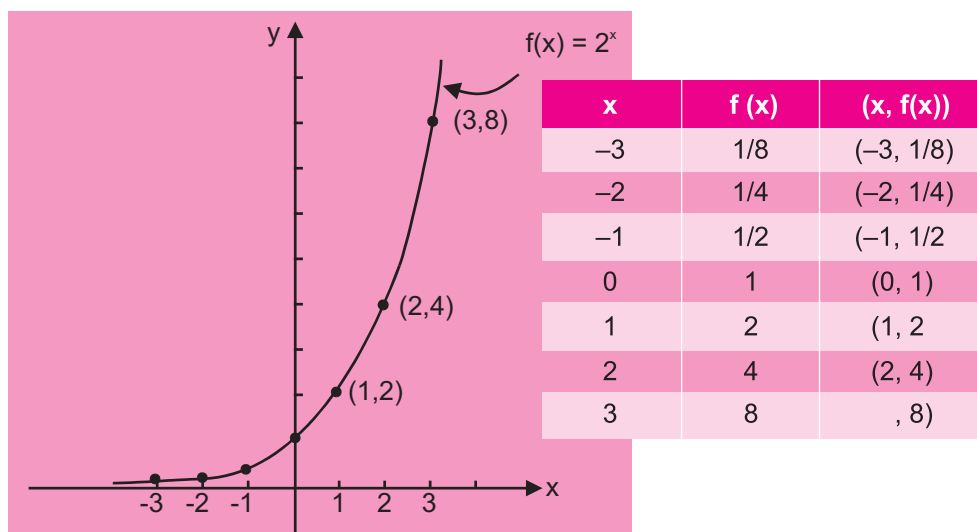
$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2^{-1} = 1/2$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 2^0 = 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 2^1 = 2$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2^2 = 4$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = 2^3 = 8$$



Conclusões sobre o gráfico de $f(x) = 2^x$.

a) $a > 1$

b) $D_f = \mathbf{R}$

c) $I_f = \mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R}; x > 0\}$

d) O gráfico de $f(x) = 2^x$ passa pelo ponto $(0, 1)$

e) $f(x)$ é crescente pois $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

$$(\text{Ex.: } 3 > 1 \Rightarrow f(3) = 8 > f(1) = 2) \text{ ou } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$$(\text{Ex.: } -3 < 2 \Rightarrow f(-3) = 1/8 < f(2) = 4).$$

Exemplo 2: Construir o gráfico de $f(x) = (2^{-1})^x$.

Observe que $f(x) = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Pelos mesmos motivos do exemplo 1, $D_f = \mathbf{R}$. Vamos determinar alguns valores para x , determinar suas imagens e construir o gráfico de $y = f(x)$.

$$x = -3, f(-3) = (1/2)^{-3} = 8$$

$$x = -2, f(-2) = (1/2)^{-2} = 4$$

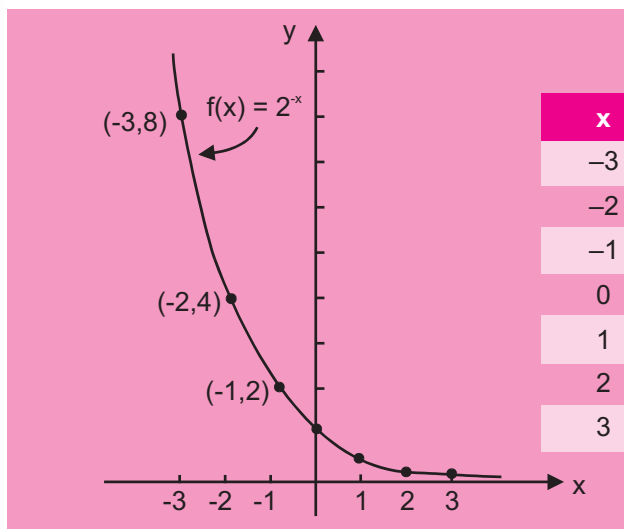
$$x = -1, f(-1) = (1/2)^{-1} = 2$$

$$x = 0, f(0) = (1/2)^0 = 1$$

$$x = 1, f(1) = (1/2)^1 = 1/2$$

$$x = 2, f(2) = (1/2)^2 = 1/4$$

$$x = 3, f(3) = (1/2)^3 = 1/8$$



x	f(x)	(x; f(x))
-3	8	(-3, 8)
-2	4	(-2, 4)
-1	2	(-1, 2)
0	1	(0, 1)
1	1/2	(1, 1/2)
2	1/4	(2, 1/4)
3	1/8	(3, 1/8)

Conclusões sobre o gráfico de $f(x) = a^x$.

Observe o comportamento e o aspecto dos gráficos das figuras 3 e 4 (abaixo).

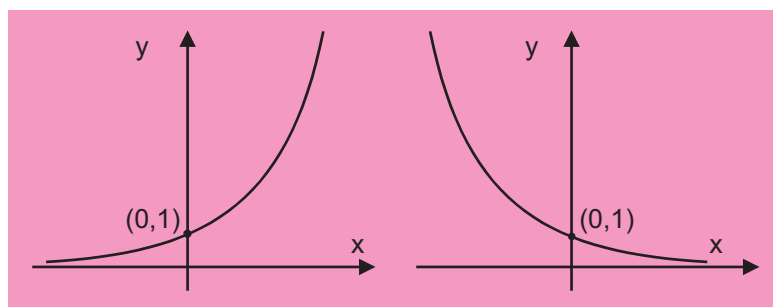
a) $a > 1$

b) $D_f = \mathbb{R}$

c) $I_f = \mathbb{R}_+^*$

d) O gráfico de $f(x)$ passa pelo ponto $(0, 1)$.

e) f é crescente: $x_1 > x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ ou $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.



Podemos ainda concluir que:

a) $0 < a < 1$

b) $D_f = \mathbb{R}$

c) $I_f = \mathbb{R}_+^*$

d) O gráfico de $f(x)$ passa pelo ponto $(0, 1)$ no eixo dos y.

e) f é decrescente: $x_1 > x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ ou $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.

De um modo geral, podemos afirmar que:

- 1) Se $a > 1$, $f(x) = a^x$ é crescente e o gráfico de $f(x)$ se situa acima do eixo das abcissas.
- 2) Se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é decrescente e o gráfico de $f(x)$ se situa acima do eixo das abcissas.
- 3) Em qualquer dos casos $D_f = \mathbf{R}$ e $I_f = \mathbf{R}_+^*$ e o gráfico de $f(x)$ passa pelo ponto $(0, 1)$ no eixo do y .

Nós vamos utilizar essas conclusões para resolvermos em seguida as inequações exponenciais. Você não terá dificuldade alguma no método que utilizaremos, pois sabe de antemão o comportamento do gráfico de qualquer função exponencial que se resume nos dois casos anteriores.

Resolução de Inequações Exponenciais

A resolução de qualquer inequação exponencial se resume a dois casos, que se referem às conclusões que obtivemos no estudo gráfico de $f(x) = a^x$; ou seja: 1º) Se $a > 1$ então teremos sempre $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$ e $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$, 2º) Se $0 < a < 1$ então teremos sempre $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$ e $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$. Vejamos alguns exercícios:

1º Caso: $f(x) = a^x$ onde $a > 1$ então $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$ e
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

Exercícios Resolvidos

1. Resolva as inequações exponenciais abaixo:

a) $3^{x-1} > 3^{-2x}$

b) $2^x < 256$

c) $243 \geq 3^{x-2}$

d) $4x \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}$

e) $2^{4x^2-2x-2} < 2^{2x-3}$

f) $16^{x-3} \leq \left(\frac{1}{256}\right)^{5-3x}$

Solução:

a) $3^{x-1} > 3^{-2x} \Leftrightarrow x - 1 > -2x$ (pois $a = 3 > 1$)

$x + 2x > 1 \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \therefore S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \frac{1}{3}\}$

b) $2^x < 256 \Leftrightarrow 2^x < 2^8$ como $a = 2 > 1$, então: $x < 8$; logo, $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 8\}$

c) $243 \geq 3^{x-2} \Leftrightarrow 3^5 \geq 3^{x-2}$ como $a = 3 > 1$, então:

$5 \geq x - 2 \rightarrow x - 2 \leq 5 \rightarrow x \leq 5 + 2 \rightarrow x \leq 7$, logo: $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 7\}$

$$d) 4^x \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \Leftrightarrow (2^2)^x \leq \left(\frac{1}{2^4}\right)^{x-1}$$

$$2^{2x} \leq (2^{-4})^{x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 2^{-4x+4} \text{ como } a = 2 > 1 \text{ teremos: } 2x \leq -4x + 4$$

$$2x + 4x \leq 4 \Leftrightarrow 6x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{6} \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{então: } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{2}{3}\}$$

$$e) 2^{4x^2-2x-2} < 2^{2x-3} \text{ como } a = 2 > 1 \text{ teremos:}$$

$$4x^2 - 2x - 2 < 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2x - 2 + 3 < 0$$

$4x^2 - 4x + 1 < 0$. Deveremos encontrar os valores de x que tornam $f(x) = 4x^2 - 4x + 1 < 0$. Temos que:

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}. \text{ Relembre a análise do sinal de } f(x).$$

Dessa forma, $S = \emptyset$; ou seja, não existe x real que torne $f(x) < 0$.

$$f) 16^{x-3} \leq \left(\frac{1}{256}\right)^{5-3x} \Leftrightarrow (2^4)^{x-3} \leq \left(\frac{1}{2^8}\right)^{5-3x}$$

$$2^{4x-12} \leq (2^{-8})^{5-3x} \Leftrightarrow 2^{4x-12} \leq 2^{-40+24x}$$

$$4x - 12 \leq -40 + 24x \Leftrightarrow 4x - 24x \leq -40 + 12$$

$-20x \leq -28 \Leftrightarrow 20x \geq 28$ (observe que quando multiplicamos uma inequação por (-1) devemos inverter o sinal da desigualdade)

$$x \geq \frac{28}{20} \rightarrow x \geq \frac{7}{5}, \text{ logo: } S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{7}{5}\right\}.$$

2º Caso: $f(x) = a^x$, onde $0 < a < 1$, então:

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y \text{ e } a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

2. Resolver as desigualdades

$$a) \left(\frac{4}{9}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$b) \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/2}$$

$$b) \frac{1}{25} < \left(\frac{1}{125}\right)$$

$$d) (0,2)^{4-3x} \geq 0,0016$$

$$e) \left(\frac{1}{125}\right)^{3x} \geq \sqrt[3]{1/5}$$

$$f) \left(\frac{1}{16}\right)^{x^2-2x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2-3}$$

Solução: Em todos estes casos $0 < a < 1$, então quando formos abandonar a base da potência deveremos inverter o sinal da desigualdade.

$$a) \left(\frac{4}{9}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$“2x \geq 2” \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Poderíamos fazer também $\left(\frac{4}{9}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow$
 $"x \geq 1"$. Logo: $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\}$

$$b) \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/2} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/2} \Leftrightarrow "x-1 < -3/2"$$

$$x < 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}. \text{ Logo: } S = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$$

$$c) \frac{1}{25} < \left(\frac{1}{125}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 < \left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}$$

$$"2 < 3x" \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}. \text{ Logo: } S = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$$

$$d) (0,2)^{4-3x} \geq 0,0016 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^{4-3x} \geq \frac{16}{10000} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^{4-3x} \geq \left(\frac{2}{10}\right)^4$$

$$"4-3x \leq 4" \rightarrow -3x \leq 4-4 \Leftrightarrow -3x \leq 0 \rightarrow 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0,$$

$$\text{então: } S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$$

$$e) \left(\frac{1}{125}\right)^{3x} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{3x} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{9x} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$"9x \leq 1/3" \Leftrightarrow x \leq \frac{1/3}{9} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{27}$$

$$\text{Logo: } S = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \frac{1}{27}\right\}$$

$$f) \left(\frac{1}{16}\right)^{x^2-2x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2-3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2(x^2-2x)} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2-3}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2-4x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2-3} \Leftrightarrow "2x^2-4x < 2x^2-3"$$

$$2x^2 - 2x^2 - 4x + 3 < 0 \rightarrow 4x + 3 < 0 - 4x < -3 \rightarrow 4x > -3 \text{ (inversão do sinal}$$

$$\text{da desigualdade)} x > -\frac{3}{4} \text{ logo: } S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -\frac{3}{4}\}.$$

Exercícios Propostos

1) Resolva as inequações:

$$\text{a) } 3^{x-2} \geq 243 \quad \text{b) } 16^x < \frac{1}{32}$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{125}\right)^{3x-1} \leq 1 \quad \text{d) } \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2} \geq \frac{625}{16}$$

$$\text{e) } (0,1)^{x^2-x} \leq 1$$

2) Resolva as inequações abaixo:

$$\text{a) } (64^{x+1})^{x-2} \geq (16^{x-3})^{x+1} \quad \text{b) } 3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x > 66$$

$$\text{c) } 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 4^{x+1} \geq 92 \quad \text{d) } 2^{x+2} + 2^{x-1} > 3^{x-1} + 3^x$$

$$\text{e) } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x-2}} \geq 8^{\frac{x-1}{x}} \quad \text{f) } {}^{2x+1}\sqrt{5^{x+1}} \cdot \sqrt{5^{x-1}} > \sqrt{125}$$

$$\text{g) } (4^{x+1}) \cdot (\sqrt{2})^{24x} > 2^{5x-2} \quad \text{h) } 2^x - 3 > 2^{2-x}$$

4.2 A Função Logarítmica

Se a e x são números reais positivos e $a \neq 1$, chama-se logaritmo de x na base a , e denota-se por $\log_a x$ ao expoente que se deve elevar a base a para obter x .

Definição, Gráficos e Propriedades

Seja $0 < a \neq 1$, $a \in \mathbf{R}$. Denominamos de função logaritmo de base a , a função que associa a cada $x \in \mathbf{R}_+^*$ o número $\log_a x$. Assim, a função logarítmica é $f: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.

Exemplos: a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

c) $f(x) = \log_2 x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Obs.: Veja no exemplo “c” a base $a = 2 > 1$, e que no exemplo “d” a base $a = \frac{1}{2} < 1$.

Construamos agora os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, da mesma forma como fizemos para função exponencial.

1) $f(x) = \log_2 x$

$$f(1/8) = \log_2 1/8 = -3$$

$$f(1/4) = \log_2 1/4 = -2$$

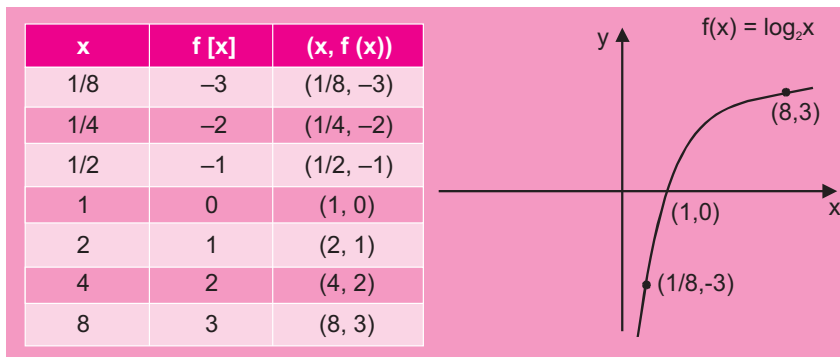
$$f(1/2) = \log_2 1/2 = -1$$

$$f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$

$$f(4) = \log_2 4 = 2$$

$$f(8) = \log_2 8 = 3$$



Conclusões sobre o gráfico de $f(x) = \log_2 x$

a) $a > 1$ b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ c) $I_f = \mathbb{R}$

d) O gráfico de $f(x)$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e situa à direita do eixo das ordenadas.

e) $f(x)$ é crescente pois $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(Ex.: $2 > 1/8 \rightarrow f(2) = 1 > f(1/8) = -3$ e $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

(Ex.: $1/4 < 8 \rightarrow f(1/4) = -2 < f(8) = 3$)

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$$f(1/8) = \log_{\frac{1}{2}} 1/8 = 3$$

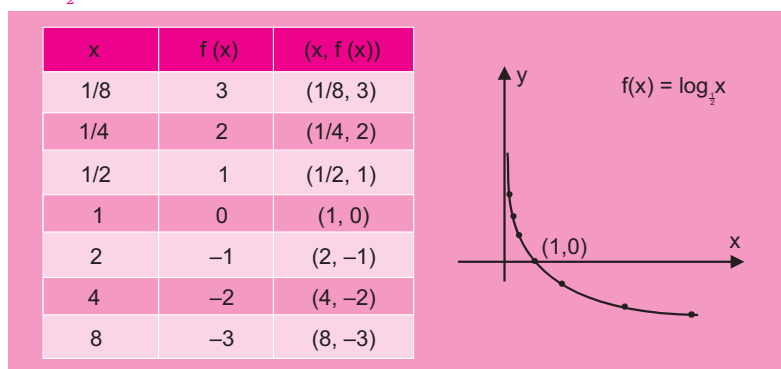
$$f(1/2) = \log_{\frac{1}{2}} 1/2 = 1$$

$$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

$$f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

$$f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

$$f(8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$



Conclusões sobre o gráfico de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

- a) $0 < a < 1$
- b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$
- c) $I_f = \mathbb{R}$
- d) O gráfico de $f(x)$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e se situa à direita dos eixos das ordenadas.
- e) $f(x)$ é decrescente, pois $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
(Ex.: $8 > 1/2 \Rightarrow f(8) = -3 < f(1/2) = 1$ e $x_1 < x_2$
 $f(x_1) > f(x_2)$) (Ex.: $\frac{1}{8} < 4 \rightarrow f(1/8) = 3 > f(4) = -2$)

Conclusões sobre o gráfico de $f(x) = \log_a x$

Observe o comportamento e o aspecto dos gráficos das figuras anteriores.

Podemos concluir que se $f(x) = \log_a x$, então:

- a) $D_f = \mathbb{R}_+^*$
- b) $I_f = \mathbb{R}$
- c) O gráfico de $f(x)$ pelo ponto $(1, 0)$
- d) $f(x)$ é crescente se $a > 1$ e f é decrescente se $0 < a < 1$.

De uma maneira geral podemos afirmar que:

- 1) Se $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ é crescente e o gráfico de $f(x)$ se situa à direita do eixo das ordenadas:
 $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$ e $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$.
- 2) Se $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ é decrescente e o gráfico de $f(x)$ se situa à direita do eixo das ordenadas:
 $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$ e $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$.
- 3) Em qualquer dos casos, o gráfico de $f(x)$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e $D_f = \mathbb{R}_+^*$ e $I_f = \mathbb{R}$.

4.3 Inequações Logarítmicas

Na resolução de uma inequação logarítmica você deve observar o seguinte:

- a) As condições de existência de $f(x) = \log_a x$, ou seja:
C.E.: $x > 0$ (o logaritmando tem que ser maior que zero).
- b) Se $a > 1$, então $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$ e $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$.
- c) Se $0 < a < 1$, então $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$ e $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$.
- d) Para dar o conjunto solução da inequação você deve apurar a interseção entre os valores obtidos para x pelas C.E. e os valores encontrados para x através da resolução da inequação.

Exercícios Resolvidos

1) Resolva as inequações

a) $\log_3 x > \log_3 2$

b) $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 2$

c) $\log_3(2x+1) \geq \log_3(x-2)$

d) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(4-x)$

Solução:

a) $\log_3 x > \log_3 2$

1) C.E.: $x > 0$;

2) $a = 3 > 1 \rightarrow \log_3 x > \log_3 2 \Leftrightarrow x > 2 > 0$, portanto: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 2$

1) C.E.: $x > 0$

2) $0 < a = 1/3 < 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 2 \rightarrow x > 2 > 0$, portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $\log_3(2x+1) \geq \log_3(x-2)$

1) C.E.: $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

C.E.: $x > 2$

2) $a = 3 > 1$, então:

$\log_3(2x+1) \geq \log_3(x-2) \Leftrightarrow 2x+1 \geq x-2$

$2x-x \geq -2-1 \Leftrightarrow x \geq -3 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

d) $\log_{1/5}(3x-1) \geq \log_{1/5}(4-x)$

1) C.E.: $3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/3 \Rightarrow 4-x > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$

C.E.: $\frac{1}{3} < x < 4$

2) $0 < a = 1/5 < 1$, portanto $\log_{1/5}(3x-1) \geq \log_{1/5}(4-x)$

$3x-1 \leq 4-x \Leftrightarrow 3x+x \leq 4+1 \Leftrightarrow 4x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 5/4$

3) Quadro de obtenção da solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/3 < x \leq 5/4\}$

2) Resolva as inequações logarítmicas:

a) $\log_{1/3}(x-3) > \log_{1/3}(x+2)$

b) $\log_3(2x+2) < 2$

c) $\log_{1/3}(x^2-4x) > \log_{1/3} 5$

d) $\log_2(2x^2-3x) < 1$

Solução:

a) $\log_{1/3}(x-3) > \log_{1/3}(x+2)$

1) C.E.: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$(x > 1 \text{ e } x > -2) \rightarrow x > 1$

C.E.: $x > 1$

2) $0 < a = 1/3 < 1$, então $\log_{1/3}(x-1) > \log_{1/3}(x+2) \Leftrightarrow x-1 < x+2$

$x-x < 2+1 \Leftrightarrow 0 < 3$

Observe que, resolvendo a inequação, não encontramos um conjunto de valores para x , contudo, a sentença $0 < 3$ é verdadeira, o que permite dizer que as condições de existência são satisfeitas e a

inequação tem como solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

Se porventura tivéssemos encontrado na resolução sentenças não verdadeiras, como por exemplo $0 > 3$, a inequação não teria solução.

b) $\log_3 (3x + 2) < 2$

1) C.E.: $3x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$

C.E.: $x > -\frac{2}{3}$

2) Observe que $2 = 2 \log_3 3 = \log_3 3^2$, portanto podemos fazer a transformação: $\log_3 (3x + 2) < \log_3 3^2$, onde $a = 3 > 1$,

então: $3x + 2 < 3^2 \hat{=} 3x < 9 - 2 \hat{=} 3x < 7 \hat{=} x < \frac{7}{3}$

3) Quadro de obtenção da solução: $(x < 7/3 \text{ e } x > -2/3) \rightarrow (-2/3 < x < 7/3)$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2/3 < x < 7/3\}$

c) $\log_{1/3} (x^2 - 4x) > \log_{1/3} 5$

1) C.E.: $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x - 4) > 0$

C.E.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 4\}$

2) $0 < a = 1/3 < 1$, portanto:

$\log_{1/3} (x^2 - 4x) > \log_{1/3} 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x < 5$

$x^2 - 4x - 5 < 0$, calculando as raízes e analisando o sinal de

$f(x) = x^2 - 4x - 5$ obteremos: $x = \frac{4 \pm 6}{2}$, ou:

$x_1 = 5$ ou $x_2 = -1$. Então: $f(x) = x^2 - 4x - 5 < 0$ quando $-1 < x < 5$.

$\{x < 0 \text{ ou } x > 4\} \text{ e } -1 < x < 5 \Leftrightarrow (1 < x < 0 \text{ ou } 4 < x < 5)$

3) Quadro de obtenção da solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

d) $\log_2 (2x^2 - 3x) < 1$

1) C.E.: $2x^2 - 3x > 0$. Calculando os zeros e analisando o sinal de $f(x) = 2x^2 - 3x$, obteremos:

$x(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$

$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

C.E.: $x < 0$ ou $x > 3/2$

2) Observe que $1 = \log_2 2$. Então podemos fazer a transformação levando em conta que $a = 2 > 1$.

$\log_2 (2x^2 - 3x) < \log_2 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x < 2$

$2x^2 - 3x - 2 < 0$. Calculando os zeros e analisando o sinal de $f(x) = 2x^2 - 3x - 2 = 0$, obteremos:

$x = \frac{3 \pm 5}{4}$, $x_1 = 2$ ou $x_2 = -\frac{1}{2}$. Então $f(x) = 2x^2 - 3x - 2 < 0$ se $-1/2 < x < 2$.

3) Quadro de obtenção da solução:

$\{x < 0 \text{ ou } x > 3/2\} \text{ e } -1/2 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \text{ ou } 3/2 < x < 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 < x < 0 \text{ ou } 3/2 < x < 2\}$

Exercícios Propostos

1) Construa num mesmo plano cartesiano um esboço dos gráficos das funções:

f: $\mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \log_3 x$

f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ definida por $g(x) = 3^x$

2) Resolva as inequações abaixo:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 2) < -1$

c) $\log(x^2 + 1) \geq 0$ d) $\log x^2 < 2$

3) Resolva as inequações abaixo:

a) $\log_5(4x - 1) < \log_5 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(-x + 4) \leq \log_{\frac{1}{5}}(2x + 2)$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x) \geq -3$

d) $\log(x - 3) + \log_2(x - 2) < 1$

e) $\log_2 \left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1) \right] < 0$

f) $2(\log x)^2 - \log x > 6$

Bibliografia

BOYER, Carl B – História da Matemática, S. Paulo, Editora E. Blucher, 1974.

MEC – SAEB 2001, Relatório Matemática, INEP, Brasília, 2002.

MEC – Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – PCNEM, Brasília, 1999

POLYA. G. - A arte de resolver Problemas, Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1986.

SEDUC – Construindo a Matemática: Ensino Médio, Fortaleza, SEDUC, 2004.

Sobre os autores

Antônio de Pádua Raposo Mazulo é mestre em Educação pela UFC e técnico da Secretaria da Educação Básica.

Ciro Nogueira Filho é mestre em Matemática, professor do Departamento de Matemática da UFC e autor de livros didáticos de Matemática.

José Othon Dantas Lopes é doutor em Matemática, professor da UFC e autor de livros didáticos de Matemática.

Manoel Ferreira de Azevedo Filho é mestre em Matemática, professor do Departamento de Matemática da UECE e autor de livros didáticos.

Consultores

Carlos Alberto Barbosa é especialista em Matemática, foi professor do Departamento de Matemática da UECE e tem vasta experiência em formação continuada de professores de Matemática.

Guilherme Lincoln Aguiar Ellery é doutor em Matemática, foi professor da disciplina na UFC e UECE, coordena a Olimpíada Cearense de Matemática e dá consultoria na área em escolas públicas e particulares.

João Marques Pereira é doutor em Matemática, foi professor do Departamento de Matemática da UFC, atualmente é professor da UECE e atua na área de formação de professores de Matemática para o Ensino Médio.

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

