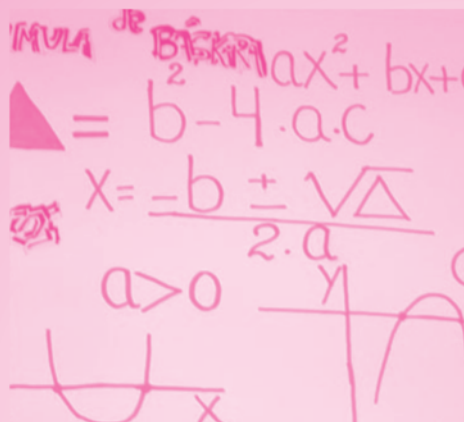


Metodologia

da Resolução de Problemas I



Antonio de Pádua Raposo Mazulo
Carlos Alberto Barbosa
Guilherme Lincoln Aguiar Ellery
João Marques Pereira

Copyright©2006 by Secretaria da Educação Básica do Estado do Ceará

Governador do Estado
Lúcio Gonçalo de Alcântara

Vice-Governador do Estado
Francisco de Queiroz Maia Júnior

Secretário da Educação Básica
Luís Eduardo de Menezes Lima

Secretária Adjunta da Educação Básica
Eloísa Maia Vidal

Secretária Executiva
Arleida Maria de Queiroz

Coordenadoria de Planejamento e Política Educacional
Zirlânea da Silva Gonçalves

Coordenadoria de Articulação e Gestão Educacional
Maria Marlene Amâncio Vieira

Coordenadoria de Monitoramento e Controle
Edson Seabra Júnior

Coordenadoria de Desenvolvimento Técnico-Pedagógico
Silvana Góis Nogueira

Célula de Gestão de Recursos Humanos
Maria Estefânia Pinheiro Cavalcante

Unidade de Gerenciamento de Projetos
Edlourdes Pires Moura Coelho

Edições SEDUC

Coordenação Editorial
Eloísa Maia Vidal

Capa e Projeto Gráfico
Roberto Santos

Editoração Eletrônica
Edições Bagaço

Revisão
Fernanda Caldas

Catálogo na Fonte
BPEP

Este projeto conta com o apoio do acordo de empréstimo N° 4591 / BR do Banco Mundial

C387m

Ceará. Secretaria da Educação Básica
Metodologia da Resolução de Problemas I. / Antônio de Pádua Raposo Mazulo...[et al.]. – Fortaleza: SEDUC, 2006.
72p. il. (vol. I)

1. PROBLEMAS E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO – PROBLEMAS MATEMÁTICOS – 2. RESOLUÇÃO COMENTADA DE PROBLEMAS – FUNÇÕES – GEOMETRIA PLANA, ESPACIAL E ANALÍTICA. I. Mazulo, Antônio de Pádua Raposo. II. título.

ISBN - 85-373-0172-8

CDU 372.47
CDD 372.7

Todos os direitos desta edição são reservados à Secretaria da Educação Básica.
Centro Administrativo Governador Virgílio Távora
Av. Gen. Afonso Albuquerque s/n, Cambeba
60.819900 Fortaleza, Ceará, Brasil
www.seduc.ce.gov.br

Apresentação

O Estado do Ceará tem registrado, nos últimos anos, avanços significativos no campo da gestão escolar. O processo de escolha dos dirigentes escolares e a criação de um Núcleo Gestor no qual existe um profissional dedicado às questões pedagógicas, marca, sem dúvida, uma mudança no paradigma de acompanhamento pedagógico que cada unidade escolar e seu conjunto de professores passa a ter.

Esse modelo iniciado em 1995 trazia em seu escopo a esperança de uma mudança significativa na relação ensino-aprendizagem e como decorrência, uma melhoria nos indicadores de desempenho dos alunos. Coincidentemente, nesse mesmo período iniciaram-se os processos de avaliação de larga escala, com destaque para o SAEB e SPAECE, no entanto, o histórico dessas avaliações mostra que o desempenho dos alunos cearenses nas séries e disciplinas avaliadas – 4^a, 8^a do Ensino Fundamental e 3^a série do Ensino Médio e Língua Portuguesa e Matemática respectivamente – vem apresentando resultados aquém do desejado.

Tal fato motivou a Secretaria da Educação Básica a investigar, de forma mais acurada, o que está acontecendo nas suas escolas e para tanto, concebeu uma pesquisa com vistas a mapear o currículo real que se dá em sala de aula, focalizando suas preocupações no Ensino Médio. O propósito era que os resultados de tal estudo subsidiassem ações orientadas que articulassem o currículo real, o currículo intencional e as Matrizes de Referência do SAEB e SPAECE. O objetivo seria a melhoria dos resultados de desempenho dos alunos na avaliação do SAEB em 2005.

Dados obtidos, quando da realização da pesquisa sobre o currículo do Ensino Médio, mostraram que os conteúdos da disciplina Matemática tinham discrepâncias curriculares bastante significativas quando comparado o currículo efetivamente trabalhado em sala de aula e a Matriz de Referência do SAEB. Os conteúdos de funções e geometria eram os que apresentavam mais distorções quanto ao tempo pedagógico, expresso em carga horária didática, dedicado a cada um deles. Vale dizer que esses conteúdos são bastante explorados nas provas do SAEB, enquanto as escolas dedicam, ao longo dos três anos de Ensino Médio, uma carga horária que não permite abordar todos os assuntos incluídos na Matriz do SAEB, acerca desses mesmos conteúdos.

Este livro é dedicado ao conteúdo **metodologia da resolução de problemas** e procura explorar todos os tópicos referentes ao assunto. A intenção é dar suporte teórico ao professor para que, na sala de aula, a abordagem sobre esse conteúdo esteja articulada com os objetivos de aprendizagem e assim os alunos possam apresentar um desempenho mais satisfatório.

Neste livro, o professor de Matemática vai encontrar apoio pedagógico para desenvolver suas atividades em sala de aula, com orientações didáticas acerca dos diversos conceitos, bem como exercícios resolvidos e propostos, para aplicar com os alunos. Esse material poderá ser utilizado durante as aulas regulares, em qualquer uma das séries do Ensino Médio, mas poderá também ser usado em jornadas extraclasse, como reforço escolar deste assunto para todos os alunos.

Secretaria da Educação Básica

Sumário

1 Problemas e Métodos de Resolução	7
1.1 Os Problemas	7
1.2 Os Problemas Matemáticos	9
1.3 Estruturas Mentais e Resolução de Problemas	10
1.4 O Método na Resolução de Problemas Matemáticos	14
1.5 É possível um método para a Resolução de Problemas?	18
2 Resolução Comentada de Problemas	20
2.1 Funções	20
2.2 Geometria Euclideana (Plana e Espacial)	30
2.3 Geometria Analítica	42

1 Problemas e Métodos de Resolução

1.1 Os Problemas

Vamos iniciar as discussões deste Módulo abordando duas questões que supomos permearem o contexto da vida do homem desde os mais remotos tempos, mais precisamente, desde que ele tomou consciência de si mesmo. Podemos afirmar que foi dessa forma, e a partir de então, que o homem começou a saber o que é um problema esforçando-se para criar métodos e, ou, estratégias para resolvê-los; é possível especular que toda a construção cultural da espécie humana começou a ser erigida desde esta tomada de consciência.

Nessa perspectiva, é conveniente fazermos uma necessária digressão antropológica considerando-se nossa descendência antropológica de 10 milhões de anos, a partir de quando se admite que três adaptações – aumento da estrutura, ações inteligentes e formação de grupos – estimularam o crescimento do cérebro da nova espécie emergente: a humana. Poderíamos resumidamente assinalar que:

Há sete milhões de anos: já existiam cérebros, dentre as espécies existentes, com qualificações ou habilitados para o desenvolvimento do pensamento matemático (considerando na perspectiva de condição inata).

Há três milhões e meio de anos: apareceu um gênero diferente dos demais antropóides, o *australopiteco*, os primeiros hominídeos que começaram a andar de forma completamente ereta e, de acordo com os antropólogos, foram eles que começaram a utilizar pés e mãos como ferramentas.

Há um milhão de anos: durante o decorrer de milhares de séculos os hominídeos foram, paulatinamente, ficando mais diferenciados dos antropóides e mais parecidos com os humanos atuais; emergiu o *homo erectus* que apresentava como principal característica um cérebro com 950cm^3 .

Há 300.000 anos: o volume do cérebro saltou para 1.350cm^3 (um crescimento de cerca de 307% em relação aos 440cm^3 do cérebro do Australopiteco) e de acordo com os achados arqueológicos, pode-se registrar o aparecimento do *homo sapiens*, aceito pelos especialistas como o primeiro hominídeo inteligente. Tal conotação deve-se mais ao fato da relação entre aumento do volume do cérebro e agir com mais inteligência, que se traduz com mais precisão, como comportamento inteligente para melhor comunicar-se.

É importante fazermos o registro de que, àquela época, assim como neste século XXI, agir com inteligência não era uma prerrogativa extensiva a todos os indivíduos, como afirma o Professor Keith Devlin, do Departamento de Matemática da Universidade de Stanford,

Geralmente pensamos em comportamento inteligente, ou inteligência, em termos de capacidade intelectual para resolver problemas que exigem pensamento abstrato. Mas esse tipo de pensamento não vem facilmente, e poucas pessoas fazem isso bem. Essa

capacidade também exige considerável esforço para se desenvolver, requerendo anos de treinamento (que nós chamamos de educação) e prática.... Os problemas surgem quando nos deparamos com condições com as quais não estamos acostumados: tipicamente nós revertermos inteiramente à condição de principiante, tendo que pensar explicitamente no que fazer.... O que a evolução nos forneceu foi a capacidade de reconhecer novos padrões e desenvolver reações comportamentais a esses padrões. (O Gene da Matemática, Keith Devlin, R. Janeiro, Record, 2005).

O Professor Devlin faz ainda referência ao período dos 75.000 anos atrás quando os Neandertais convivem com o *Homo Sapiens* arcaico; nesta época, por volta de 40.000 anos atrás, surge o *Homo Sapiens*. Os cérebros humanos, mesmo não aumentando de volume, adquirem então uma qualificação excepcional com a emergência do pensamento simbólico, da linguagem, da noção do tempo, da aptidão na formulação de planos e a capacidade de executá-los e, finalmente, para resolver todos os seus problemas de subsistência, tornam-se competentes na elaboração de projetos de construção de novas ferramentas manufaturadas utilizando-as na sua prática cotidiana. **No final, os poucos milhares de primeiros hominídeos deram origem a seis bilhões de descendentes humanos, que descobriram como usar as desesperadas capacidades de sobrevivência de seus ancestrais para estabelecer um modo de vida único entre as criaturas da terra¹.**

Sobre o assunto, convém registrar a interpretação do arqueólogo inglês Steven Milhen:

O Homo sapiens agora está sozinho no palco do mundo... À medida que as placas de gelo começam a retrair-se, o palco torna-se ainda maior com o acréscimo da América do Norte e do Sul. Isso marca o fim do Pleistoceno, quando o ator é conduzido até o mundo quente do Holoceno e à cena final da peça... Os acontecimentos agora passam como um raio numa velocidade estonteante. As pessoas criam aldeias e depois cidades. Sucessões de impérios emergem e caem. Os objetos de cena tornam-se ainda mais prevalentes, diversos e complexos. Em não mais que um instante, carroças viraram carros e escrivainhas se tornaram computadores. Depois de quase seis milhões de anos de relativa inércia, é difícil compreender o sentido desta agitada cena final (A pré-história da mente, Steven Milhen, S. Paulo, UNESP, 2002).

Em pleno século XXI, se realmente concordamos que estamos em plena cena final, precisamos dar sentido a ela. A nossa contribuição, no contexto geral e universal, assumida na função de educadores, sugere-

1. O Gene da Matemática, Keith Devlin, R. Janeiro, Record, 2005.

nos a responsabilidade da formação de indivíduos inteligentes ou pelo menos que manifestem comportamentos inteligentes, mesmo refletindo sobre a advertência do Dr. Howard Gardner onde, para ele, **... uma sociedade dirigida por gente inteligente ainda pode destruir a si mesma ou ao resto do mundo. Inteligência vale muito, mas, segundo o célebre comentário de Ralph Waldo Emerson: O caráter é mais importante que o intelecto²**. Só nos resta, portanto, e como alternativa única, contribuir para a formação de indivíduos inteligentes, mas com firmeza de caráter no que diz respeito à moral e à ética.

1.2 Os Problemas Matemáticos

A reflexão que realizamos até o momento nos permite, pelo menos, aceitar o fato de que a escola é o local adequado, se bem que não o único, para que se estimulem ações que promovam o desenvolvimento das capacidades potenciais da inteligência dos indivíduos. Isto posto, e a partir de agora, nos preocuparemos com as questões objetivas da relação entre a resolução de problemas matemáticos e o desenvolvimento do comportamento inteligente, e não com as questões subjetivas da inteligência em si mesma.

Assim, e tendo como foco a contextualização pedagógica no universo escolar, pautar-nos-emos pela seguinte conceituação de problema:

No âmbito de uma disciplina ou de um conteúdo curricular e diante de uma questão proposta, situação ou pergunta inusitada, onde o indivíduo necessita utilizar todo o conhecimento de que dispõe sobre o assunto e para o qual, não tendo uma resposta pronta e imediata tem que elaborar uma estratégia de solução, então esta questão ou situação pode ser caracterizada como **problema**.

Se você analisar com detalhes o conceito que enunciamos, a caracterização de um problema para o aluno acontecerá sempre que:

- Mesmo que ele tenha o domínio sobre o conteúdo, existe algo novo que desperta a sua curiosidade e interesse.
- É necessário o seu empenho na busca de todo o conhecimento até então desenvolvido e apreendido sobre o assunto.
- Não lhe ocorre prontamente, de modo imediato, uma resposta.
- É necessário o estabelecimento de uma estratégia de solução, mesmo que seja bem simples.

É preciso considerar no entanto que, a proposição de problemas, via de regra, efetiva-se pelo professor como atividade docente. Alguns aspectos devem ser levados em conta na maneira de selecioná-los, tais como:

² INTELIGÊNCIA, um conceito reformulado, Dr. Howard Gardner, Rio de Janeiro, Objetiva, 2001.

- A solução de problemas deve caracterizar-se como a essência da atividade matemática com o fito de, principalmente, dar significado aos conhecimentos que deverão ser apreendidos pelos alunos.
- Os problemas podem-se transformar, no âmbito da relação professor-aluno-conhecimento, o caminho pedagógico mais prazeroso para a emergência da aprendizagem.
- Os problemas devem-se constituir em **desafios** passíveis de serem vencidos ou transpostos para que o aluno, acreditando nessa probabilidade, possa experimentar a alegria e o prazer do sentimento da vitória. Se tal não decorrer, ele certamente esmorecerá na primeira tentativa fracassada. No processo geral de tentativas e erros, de reavaliações de estratégias, a pura e simples resolução é minimizada em importância se comparada ao universo de relações que se estabelecem no decurso dela que, na verdade, são as responsáveis pela emergência da aprendizagem significativa.

Para finalizar esta etapa de nossas discussões, vamos recorrer ao mestre Polya que sobre a classificação dos problemas escreve:

O objetivo de um **problema de determinação** é encontrar um certo objeto, a incógnita do problema... que é também chamada **quaesitum**, ou aquilo que se procura ou de que se necessita... podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos, podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos... O objetivo de um **problema de demonstração** é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou então, que é falsa... (A Arte de Resolver Problemas, G. Polya, Interciência, 1995, Rio de Janeiro)

Voltaremos a este assunto quando analisarmos, na prática, e segundo um método, a resolução propriamente de problemas.

1.3 Estruturas Mentais e Resolução de Problemas

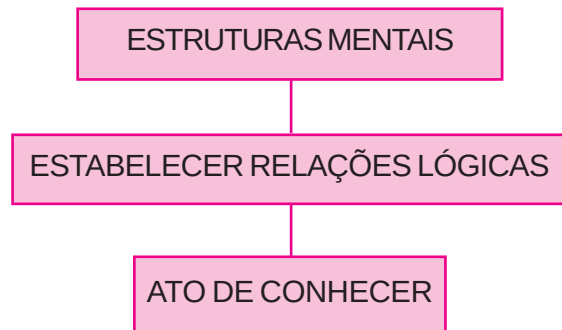
Pode parecer, num primeiro momento, que se o professor colocar em disponibilidade passos ou caminhos será o bastante para que ao segui-los, o aluno tenha êxito na resolução de problemas de sua disciplina. Não é bem assim, conforme veremos nas breves considerações sobre assuntos diretamente relacionados e que fundamentam o propósito destas nossas reflexões.

Os estudos piagetianos nos dão conta de que a ocorrência do **conhecimento** só pode ser admitido a partir da **experiência** (vívda) contudo, carecendo para se consolidar de uma rede de relações entre o ser cognoscente – o indivíduo que quer conhecer – e o objeto do conheci-

mento. Dessa forma, **experiência/vivência**, em si mesma, não implica em **conhecimento** (nem são palavras sinônimas), para Piaget, a capacidade de conhecer está diretamente relacionada com as possibilidades entre as trocas que são efetuadas entre o **organismo** e o **meio**, ressaltando estas possibilidades por meio de estruturas, sendo:

- **As estruturas orgânicas inteiramente programadas:** as dos aparelhos digestivo, respiratório, etc.
- **As estruturas que em parte são programadas:** as do sistema nervoso.
- **As estruturas que não têm nenhuma programação prévia:** são aquelas que diretamente nos interessam, as estruturas mentais.

Nós podemos pensá-las como preparadas ou estabelecidas em nosso organismo para a **ação do conhecimento**, mediadas pela capacidade de estabelecer relações lógicas, grosso modo assim esquematizado.



Ora, se o ato de conhecer está intrinsecamente dependente do estabelecimento de relações lógicas, é inevitável que tenhamos que focar nossas preocupações, e isto diz respeito enfaticamente ao desempenho docente do professor, nas correlações explícitas entre a construção das operações mentais e ensino / aprendizagem de Matemática porque,

A capacidade inconsciente de estruturar a experiência vivida vem da própria atividade das estruturas mentais que funcionam seriando, ordenando, classificando e estabelecendo implicações. Para Piaget, a lógica de classes e relações, é como é, porque revela a forma pura do funcionamento das estruturas mentais biológicas específicas para o ato de conhecer, ou seja, a forma de funcionamento da razão humana. O ser humano só relaciona coisas porque a sua inteligência funciona relacionando de acordo com as leis do funcionamento da razão do **homo sapiens**, ou seja, o conjunto das estruturas biológicas do ser humano.

Isto significa que, todos nós, já nascemos biologicamente preparados para evoluirmos no conhecimento das coisas do mundo; uns conhecem mais que outros porque no decurso de suas vidas foram mais solicitados para estabelecer relações, o que se traduz como se a estes indivíduos os se lhes foram apresentadas ou eles se depararam, pelas próprias contingências do cotidiano, com uma quantidade maior de situações problemáticas que outros. Isto posto, e retornando ao nosso lugar comum, a sala de aula, podemos fazer algumas inferências sobre o trabalho do professor no seu objetivo de melhorar o desempenho dos alunos.

1. Se os alunos são psicologicamente normais e não apresentam graves lesões cerebrais, todos então detêm as prerrogativas biológicas essenciais e necessárias para o ato de aprender: as **estruturas mentais**.
2. Os desníveis que se constata entre os alunos de uma mesma turma, fato mais reconhecidamente contundente na rede pública de ensino, deve-se às diferentes experiências da vida escolar vividas por eles e certamente prejudicadas por fatores como: interrupção dos estudos, mudança de unidade escolar, conteúdos curriculares pouco relevantes ou desenvolvidos de forma inadequada, etc.

Assim, a tentativa de formular métodos de resolução de problemas requer, para a compreensão de quaisquer deles, que alunos e professores estejam convencidos de que eles não passam de estratégias logicamente encadeadas e que se submetem aos cânones da ocorrência da aprendizagem geral.

Prosseguindo em nossas reflexões, agora convencidos de que estamos trabalhando com indivíduos psicologicamente normais, aptos portanto para o ato de conhecer, embora considerando os desníveis já referidos, que outros óbices devem ser observados na prática em sala de aula? Dizendo de uma forma mais objetiva e explícita: Que ações pedagógicas o professor pode desenvolver a fim de aumentar a motivação do aluno para a aprendizagem por meio de resolução de problemas?

Mas o que realmente entendemos por motivação? E por motivo? É fácil a compreensão dessa emoção quando nos transportamos para o contexto das disputas esportivas em geral. No mais popular esporte mundial, o futebol, observa-se que em equipes de níveis idênticos, não é somente a competência técnica dos jogadores que decide uma partida. A capacidade do treinador em levar motivação aos seus atletas, mesmo em partidas onde o resultado adverso e o tempo para modificá-lo são considerados impedimentos intransponíveis, a intervenção do técnico junto aos jogadores vira o jogo. Note-se que nos últimos anos, no voleibol e no basquetebol, temos visto cenas notórias de motivação vividas por técnicos e jogadores que propiciaram extraordinárias vitórias às respectivas seleções brasileiras.

No âmbito da Psicologia, sugere-se que um indivíduo está motivado quando desenvolve um estado de tensão ocasionado por algum desejo ou vontade não alcançada. Portanto, a motivação que deve ser desenvolvida no trabalho de sala de aula pode ser traduzida pela expectativa

que o professor faz emergir no conjunto dos seus alunos sobre as consequências benéficas que o sucesso escolar pode proporcionar no contexto pessoal ou na vida profissional não tão distante.

A resolução de problemas escolares é muito propício para a fomentação de climas de motivação, pois trata-se de terreno fértil devido ao apelo maior que pode ser estabelecido pelo prazer da descoberta oportunizado com a exercitação da criatividade na elaboração de planos e estratégias para a efetivação da solução dos problemas.

Mesmo que tenhamos avançado em nossa breve análise sobre a importância da motivação, precisamos dar um passo além, antes de nos empenharmos na discussão propriamente dita sobre a elaboração e utilização de um método de resolução de problemas. Para tanto, precisamos responder à seguinte indagação: Que procedimentos pedagógicos devem ser empregados pelo professor para que os conhecimentos que ele deseja transmitir tenham significado para os alunos?

O material que é significativo para os estudantes é lembrado com mais facilidade que o material que não o é. Significado consiste em os alunos perceberem relações entre fatos – generalizações, regras, princípios – para os quais vêem algum uso. Fatos essencialmente isolados são, em termos de significado a mesma coisa que sílabas sem sentido ... Tornar a aprendizagem significativa é uma questão de selecionar o conteúdo adequado e auxiliar os estudantes a verem a sua aplicabilidade a situações que dizem respeito (Teorias da Aprendizagem para Professores, Morris L. Bigge, E.P.U., São Paulo, 1977).

De uma maneira geral, no próprio cotidiano da vida, nos interessamos pelas coisas na medida em que elas nos despertam significado porque a partir de então vislumbramos as suas finalidades – para que servem – e seus objetivos – como podemos utilizá-las. Vale a pena citar o experimento realizado pelo psicólogo francês Alfred Binet que no início do século passado propôs os primeiros testes para medir a atividade intelectual, conhecidos como psicométricos ou, mais comumente, de quocientes de inteligência (Q.I.)

Binet organizou uma competição onde desejava aferir a destreza do cálculo aritmético mental. De um lado reuniu dois especialistas tidos como mágicos na arte de calcular e que se exibiam mostrando os seus dotes mentais. De outro lado, chamou quatro funcionários de uma loja onde trabalhavam como caixas; os números para eles tinham a sobrevivência como significado. Aos dois grupos, foram feitas duas propostas de cálculos de produtos: o primeiro 638×823 e o segundo 7.286×5.397 . Conforme os relatos, a performance dos mágicos foi de 6,4 segundos no primeiro caso e 21 segundos no segundo, enquanto que os caixas da loja levaram apenas 4 segundos e 13 segundos, respectivamente, no primeiro e segundo caso. Observe que, à época, não havia a disponibilidade

para os competidores das atuais máquinas calculadoras e que, embora o trabalho de operar com números fosse significativo para os calculadores exibicionistas – os mágicos –, tudo parece indicar que muito mais significado despertava aos caixas, a ponto de terem desenvolvido técnicas mais rápidas e mais sofisticadas que seus contendores.

É bem provável que tenhamos passado a idéia de que cabe ao professor a responsabilidade de despertar o pendor matemático latente em todo e qualquer aluno. Estamos perfeitamente conscientes da diferença entre o querer aprender a gostar de estudar Matemática e o querer ser Matemático; a primeira afirmativa está ao alcance e é função do professor realizá-la, porque,

A maioria das pessoas pode ir muito além do que julgam que podem. A Matemática não é diferente de correr uma maratona. Para a maioria das pessoas, tudo que é preciso para se correr a maratona é um desejo suficiente para fazê-lo. O alento só importa se você quiser se sair melhor do que todos os outros. Acontece isso em Matemática. A chave para ser capaz de lidar com a Matemática é querer. Não estou falando de se tornar um grande matemático ou de se aventurar nas difíceis alturas da Matemática avançada. Falo somente de ser capaz de lidar com a Matemática que encontramos na maioria dos cursos médios. (O Gene da Matemática, Keith Devlin, R. janeiro, Record, 2003).

Para quem teve a oportunidade de assistir à maratona denominada Corrida de São Silvestre, realizada em São Paulo em 31/12/05, entenderá perfeitamente a admirável comparação realizada pelo Dr. Devlin.

1.4 O Método na Resolução de Problemas Matemáticos

Iniciaremos esta seção analisando duas situações relativas aos raciocínios indutivos e dedutivos.

Primeira Situação

Mostrar que o quadrado de todo número ímpar subtraído de uma unidade é sempre divisível por 8.

Demonstração:

- a) Vamos verificar se a afirmação é válida para os três primeiros números ímpares 3, 5 e 7. Veja.
- $(3^2 - 1) = 9 - 1 = 8$ e 8 é divisível por 8.
 - $(5^2 - 1) = 25 - 1 = 24$ e 24 é divisível por 8.
 - $(7^2 - 1) = 49 - 1 = 48$ e 48 é divisível por 8.

- b) Observe que se n é um número natural qualquer, ou seja, se " $n \in \mathbb{N}$ ", então como todo número ímpar tem representação na forma da expressão $2K - 1$ em que $K \in \mathbb{N}$. Vamos verificar se a afirmação é válida para o caso geral:

$$\bullet [(2K - 1)^2 - 1] = 4K^2 - 4K + 1 - 1 = 4k^2 - 4K = 4K(k-1)$$

Resumidamente, $(2K - 1)^2 - 1 = 4K(K - 1)$

Analisando a expressão $4K(K - 1)$ observamos que:

- $4K(K - 1)$ é número múltiplo de 4, portanto, divisível por 4.
- $(K - 1)$ e K são números naturais consecutivos; portanto, ou k é par ou $(K - 1)$ é par, daí, necessariamente, o produto $K (K - 1)$ tem 2 como fator.
- Se $K (K - 1)$ tem 2 como fator, então, também, necessariamente o produto $4K (K - 1)$ terá 8 como fator e, portanto, $4K (K - 1)$ é divisível por 8.
- Conclusão:

Mostramos que a afirmativa é válida para três casos particulares onde $n \in \mathbb{N}$ e $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, e $n_3 = 7$. Em seguida, verificamos que a afirmação também é verdadeira para o caso geral, onde qualquer número natural ímpar n é representado pela expressão $2K - 1$. Em consequência podemos afirmar que O quadrado de todo número ímpar subtraído de uma unidade, é sempre divisível por 8. Dizemos, neste caso, que utilizamos o **processo indutivo** que implica em descobrir **leis gerais** a partir de **casos particulares**.

Segunda Situação

Mostrar que **para que duas retas sejam diferentes ou não coincidentes é necessário que não tenham mais do que um ponto em comum.**

Demonstração:

- a) Basta utilizar o Axioma (proposição evidente e incontestável) da Geometria Plana: através de dois pontos pode passar uma e somente uma reta.
- b) Se admitirmos que retas diferentes podem ter dois pontos comuns estaremos contrariando a nossa verdade a priori de que através de dois pontos pode passar uma e somente uma reta.
- c) Conclusão:

Neste caso nós demonstramos que a afirmação é verdadeira utilizando uma lei geral considerada como inquestionavelmente correta; utilizamos o **processo dedutivo** que consiste na admissão de **leis gerais** aceitas a priori ou já comprovadas, para demonstrar a veracidade de casos particulares.

Trouxemos essas duas situações para a discussão porque existe uma utilização indiscriminada dos termos método indutivo e dedutivo, processo indutivo e dedutivo e pensamento / raciocínio indutivo e dedutivo, todos eles utilizados com significados idênticos. Subsidiando nossas reflexões, relembremos que os estudiosos da Psicologia evolutiva e da Neurolingüística são consensuais em definir, grosso modo, inteligência como a capacidade de resolver problemas e produzir coisas no âmbito das artes, das ciências naturais e sociais, etc., e aprendizagem como a efetivação de mudanças de paradigmas comportamentais. Será que também já temos uma noção bem explícita do que seja o Pensamento?

A aprendizagem e o pensamento podem ser representados, em todas as suas formas, como constituindo um espectro contínuo de complexidade, e seu objetivo final é ligar os processos mentais... Especificamente, a distinção entre pensamento divergente e pensamento convergente sugerida por diversos autores foi submetida, a Guilford e seus colaboradores, a cuidadosa pesquisa experimental. A distinção é importante... o pensamento convergente é o exigido para resolver problema que tem resposta correta definida, enquanto que o pensamento divergente é mais aberto, menos analítico – o tipo de pensamento necessário para enfrentar um problema que pode ter várias respostas mais ou menos certas ou não ter uma resposta correta (A Inteligência Humana, H. J. Butcher, Perspectiva, S. Paulo, 1981).

Quando tratamos das Estruturas Mentais e Resolução de Problemas, vimos que o ato de conhecer se estabelece pelas relações lógicas que se realizam junto ou no âmbito das estruturas mentais. Parece-nos confirmarem-se tais perspectivas quando da afirmação do Dr. Butcher explicitando que o objetivo final do pensamento é ligar os processos mentais. Sobre o assunto é importante registrar a tese que defende Keith Devlin, professor de Matemática da Universidade de Stanford.

Suponha por um momento que fôssemos capazes de ver dentro do cérebro humano, e que um neurônio brilhasse rapidamente toda vez que fosse ativado, seu brilho dependendo da força de ativação. Produzindo um padrão de *input* a partir do sistema nervoso, veríamos um conjunto de neurônios iluminados de diferentes brilhos espalhados por todo o cérebro [...] Então observaríamos um verdadeiro show de luzes no momento em que a corrente fluísse (em paralelo) de neurônio para neurônio. Seria o cérebro processando (ou pensando) [...]. Defendendo a tese de que a diferença fundamental entre o cérebro humano e o de qualquer outra criatura, viva ou extinta, é que o humano pode simular qualquer padrão de ativação produzido externamente, de modo a dar partida à seqüência sem, necessariamente, gerar uma resposta corporal. É a

atividade do cérebro originária do próprio cérebro, não causada por algum estímulo externo, e realizada sem a produção automática de uma resposta corporal que venho chamando de pensamento desconectado.

O professor Kevlin admite também que estímulos externos podem causar pensamentos desconectados assim como concorda que nem toda atividade cerebral exige estímulos externos porque o cérebro de qualquer indivíduo está ininterruptamente sendo ativamente solicitado iniciando, reiniciando, monitorando e controlando as diversas ações físicas ou corporais.

Chama a atenção, no entanto, para a tese do pensamento desconectado, porque além de se relacionar com a resolução de problemas matemáticos, é entendida como uma atividade própria do cérebro que se realiza no âmbito dos circuitos neuronais e independente de quaisquer ativações ou estímulos externos. A assunção dessa tese implica na admissão da possibilidade de independência – ou da detenção de prerrogativas próprias – do cérebro no ato de pensar. Enfim, refletindo-se sobre os posicionamentos do Butcher enunciados em 1967 e os do Professor Devlin 32 anos depois em 1999, verifica-se que eles não são mutuamente excludentes onde o traço comum é o fato de que o pensamento é originário e se estabelece no cérebro por meio das ligações dos processos mentais (Butcher) viabilizados pelos circuitos neuronais (Kevlin).

Assim, a questão que se coloca é saber se é correto nos referirmos a Pensamento Indutivo e Pensamento Dedutivo e, ou, Raciocínio Indutivo e Raciocínio Dedutivo, o que implica em formular a pergunta: Existe diferença entre pensamento e raciocínio? e ainda; O que é raciocínio? A Psicóloga chilena Grécia Galvez em sua tese de doutorado, em 1985, refere-se que na geometria grega se raciocina rigorosamente sobre quaisquer traçados e observa – citando La borde, C. (1984) e Piaget / Garcia (1982),

*A geometria da matemática não é o estudo do espaço e de nossas relações com o espaço, mas o lugar em que é exercido um **raciocínio** levado à sua excelência máxima [...]. No século XVII, Descartes e Fernet substituem os pontos de um plano por pares de números e as curvas por equações. Desta maneira, o estudo das propriedades das curvas será substituído pelo estudo das propriedades algébricas das equações correspondentes[...]. Os **raciocínios** não são limitados pelas dificuldades de imaginar ou representar figurativamente suas consequências. (Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas, Grécia Galves, Artes Médicas, Porto Alegre, 1996).*

Você encontra agora subsídios suficientes para estabelecer a diferença entre pensar e raciocinar? Essas últimas colocações da psicóloga Grécia nos sugere que podemos aceitar o raciocínio como uma extensão do pensamento. Mais precisamente, raciocínio é o pensamento aplicado na resolução de problemas, o que implica dizer que raciocinar é uma forma de pensar operativamente, um processo sistêmico e

logicamente organizado. Em decorrência, sem perda de generalidade e respeitadas as situações ou contextos, é possível falarmos ora em pensamento indutivo / dedutivo, ora raciocínio indutivo / dedutivo.

1.5 É possível um método para a resolução de problemas?

A filosofia ajuda dizendo que dependendo de sua formulação, o **Método**, pode interferir na lapidação do nosso modo de pensar para a consecução da busca da verdade. Traduzindo-se com mais objetividade; um **Método** se constitui de um conjunto de procedimentos e de normas formais que devem ser seguidas na investigação da verdade, na obtenção de fins bem determinados, em processos ou técnicas de ensino; por exemplo, na resolução de problemas, etc.

Na pesquisa, geralmente é utilizado o chamado **Método de Pesquisa Científica** definido por um conjunto de procedimentos ou pelas fases ou roteiros que listamos a seguir:

- A formulação do problema
- Enunciado de hipóteses
- Coleta de dados
- Análise e interpretação dos dados

A exemplo do Método Científico é possível elaborar um método para a resolução de problemas?

Já comentamos no decurso de nossas análises que “resolver problemas” remonta aos ancestrais humanos, considerado uma necessidade até por uma questão de sobrevivência, pois

Apresentei argumentos de que os primeiros Homo e os humanos arcaicos precisavam gerar e testar hipóteses sobre a distribuição de recursos, especialmente as carcaças para rapinagem, utilizando a inteligência naturalista. A segunda propriedade importante da ciência é o desenvolvimento e uso de ferramentas para resolver problemas específicos... (A pré-história da Mente, Steven Mithen, Unesp, S. Paulo, 1998).

Desse modo, se até nossos *arcaicos ancestrais* precisavam testar hipóteses, portanto, formular à maneira da época, um **método** para a distribuição das carcaças de animais coletadas, nós, humanos do século XXI certamente não teremos dificuldades em elaborar o nosso **método** de solução de problemas matemáticos. Numa época mais anterior a esta que vivemos, a Heurística, tida ou definida como um método analítico para a descoberta de verdades científicas, era requisitada como patrimônio da Filosofia, da Lógica e da Psicologia. O professor G. Polya faz menção de sua utilização por Euclides e que, talvez uma primeira tentativa de sistematizá-la se deveu a Descartes e Leibnitz, filósofos e matemáticos notórios.

No entanto, e ainda de acordo com Polya, a maior contribuição dada à Heurística veio do século III por meio do matemático grego Pappus em seu Livro VII de sua famosa *Collectiones*, onde, por volta do ano 300, afirmava que:

A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos desejam adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos e somente serve para este fim. É o resultado do trabalho de três homens: Euclides, o autor dos Elementos; Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo. Ela ensina os procedimentos da análise e da síntese [...]. Ora, há dois tipos de análises; um é a análise de **problemas de demonstração** e visa a estabelecer a verdade dos teoremas; o outro, é a análise dos **problemas de determinação** que visa a encontrar as incógnitas [...] temos de encontrar uma certa incógnita x que satisfaz uma condicionante claramente enunciada... (A Arte de Resolver Problemas, G. Polya, Interciência, R. Janeiro, 1995).

Como definimos anteriormente, um método se constitui de um conjunto de procedimentos, um roteiro bem organizado para ser seguido integralmente, passo a passo, sem o quê, a busca da verdade, o objetivo do método, poderá não ser viabilizado.

Isto posto, não se constitui nosso propósito discutir se a Heurística é um método (Polya) ou uma doutrina (Pappus), (registre-se a interpretação de Polya considerando que a Heurística visa à generalidade, ao estudo de procedimentos que independem do assunto em questão e são aplicáveis a problemas de toda sorte) mas analisar os seus fundamentos para aplicá-los na formulação de um Método de Resolução de Problemas que será definido e utilizado neste Módulo.

Sobre a afirmação de Pappus – no último excerto citado –, Temos de encontrar uma certa incógnita x que satisfaz uma **condicionante** claramente enunciada, observe-se que o termo condicionante é utilizado no sentido de relacionar aquilo que o problema propõe que seja descoberto, a incógnita / variável, aos dados apresentados como condição prévia, ou seja, a determinação da incógnita x ! está submetida às condições, à condicionante, previamente estabelecida no problema. Já podemos então determinar as etapas ou procedimentos que adotaremos em nosso Método de Resolução de Problemas.

1º Procedimento: leitura, compreensão e interpretação do problema. A condicionante e suas partes.

2º Procedimento: organização do plano de resolução. A utilização de algoritmos, conhecimentos prévios, pensamento indutivo / dedutivo.

3º Procedimento: a execução do plano de resolução. O domínio dos conteúdos e estratégias previstas no plano.

4º Procedimento: a verificação e confirmação da resposta. Verificação matemática se a resposta atende às exigências da condicionante.

2 Resolução Comentada de Problemas

No presente capítulo, são apresentados três grupos de problemas matemáticos abordáveis no contexto dos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio.

Para analisar e resolver os problemas é necessário o domínio de conceitos, propriedades e relações matemáticas envolvendo Funções, Geometria Euclideana (Plana e Espacial) e Geometria Analítica.

Após o enunciado de cada problema, estão indicados os conhecimentos que poderão ser levados em conta na sua resolução. A resolução comentada, em alguns casos com duas alternativas de solução, intenta mostrar aspectos que possibilitem, de um lado, aplicar diretamente os conceitos, as propriedades e as relações matemáticas conhecidas no contexto do problema e, de outro, apontar lógicas de raciocínio e novos conteúdos que possam enriquecer a abordagem de situações envolvendo Funções, Geometria Euclideana e Geometria Analítica.

2.1 Funções

Problema 1: Seja $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva tal que $f(1) = 3$ e $f(3) = 4$.

a) Determine o valor de x tal que $f(f(2x - 4)) = 4$.

b) Determine a função linear afim f que satisfaz às condições colocadas.

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Função injetiva: Uma função $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva se sempre que $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$ ou, equivalentemente, $f(x_1) = f(x_2)$ ocorre apenas quando $x_1 = x_2$.
- b) Função linear afim: Uma função $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função linear afim se f tem a forma $f(x) = ax + b$ onde a e b são números reais. O gráfico de uma função linear afim é uma reta. O número a é igual à tangente do ângulo que o gráfico de f faz com o eixo x . Quando $b = 0$, f é chamada de função linear e, neste caso, seu gráfico passa pela origem.
- c) Equações e sistemas do primeiro grau: Resolução.

II. Organização e execução do Plano de Resolução

- a) Sendo $f(f(2x - 4)) = 4$ e $f(3) = 4$ e sendo f injetiva devemos ter $f(2x - 4) = 3$. Mas como $f(1) = 3$, usando novamente a injetividade de f teremos

$$2x - 4 = 1. \text{ Segue que } 2x = 5 \text{ e } x = \frac{5}{2}.$$

- b) Vamos encontrar uma função da forma $f(x) = ax + b$ tal que $f(1) = 3$ e $f(3) = 4$. Fazendo $x = 1$ e $x = 3$ temos $f(1) = a.1 + b$ e $f(3) = a.3 + b$.

$$\text{Teremos então as equações: } \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, basta multiplicar a primeira equação por -1 e somar as equações resultantes. Obtemos $3a - a + b - b = 4 - 3$ ou $2a = 1$. Segue que $a = \frac{1}{2}$. Como $b = 3 - a$ teremos $b = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. A função será portanto: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

III. Verificação e confirmação da resposta.

Veja que as condições são satisfeitas:

$$f(1) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad f(3) = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

i) O valor de x tal que $f(f(2x-4)) = 4$ é $\frac{1}{2}$

ii) A função linear afim tal que $f(1) = 3$ e $f(3) = 4$ é $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Problema 2: Em uma fábrica de vasos ornamentais, o custo “p” de produção, em reais, de cada vaso depende da quantidade “q” de vasos fabricados, e essa quantidade depende do número “n”, em horas, de funcionamento de uma máquina. Essas dependências são descritas pelas fórmulas:

$$p = 3 + \frac{500}{q} \text{ e } q = 200n$$

Se essa máquina funcionar por apenas 10 horas, quanto será o custo de produção de cada vaso?

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Relação entre o custo “p” e quantidade “q”.
- b) Uma outra relação envolvendo a quantidade “q” e o número “n” de horas.

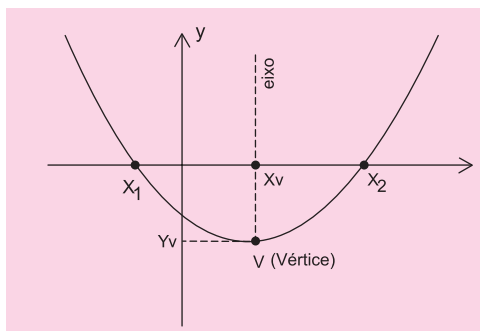
II) Organização e execução do Plano de Resolução

Sendo $p = 3 + \frac{500}{q}$ e $q = 200n$, para $n = 10$, vem que $q = 200 \times 10 = 2.000$ e, assim,

$$p = 3 + \frac{500}{2000} \Rightarrow p = 3 + \frac{5}{20} \Rightarrow p = 3 + \frac{1}{4} \text{ ou } p = 3 + 0,25 \Rightarrow p = 3,25$$

III) Verificação e confirmação da resposta: O custo de cada vaso será de R\$ 3,25.

Problema 3: O gráfico abaixo representa a função polinomial do 2º grau definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Determine os sinais dos coeficientes a , b , c e do $\Delta = b^2 - 4ac$.

I) Conceitos, propriedades e relações envolvidas na questão

- Concavidade da parábola.
- Regra de sinais entre as operações.
- Vértice da parábola $v = (-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$.
- Interpretação gráfica.
- Delta (discriminante) $\Delta = b^2 - 4ac$.

II) Organização e execução do Plano de Resolução

Temos $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como o gráfico é uma parábola com a concavidade para cima temos $a > 0$; fazendo $x = 0$, temos $y = 0 + 0 + c = c$, a função intercepta o eixo dos y no valor c e como essa intersecção acontece abaixo do eixo dos x temos que $c < 0$; a abscissa do vértice da função é dado por $x_v = -\frac{b}{2a}$ e de acordo com o gráfico temos que $x_v > 0$ ou $-\frac{b}{2a} > 0$; logo, $a > 0$ e o quociente $-\frac{b}{2a} > 0$, concluímos que $b < 0$; como a função tem duas raízes reais e diferentes, temos $D = b^2 - 4ac > 0$.

III) Verificação e confirmação da resposta

- O sinal de a é positivo: $a > 0$.
- O sinal de c é negativo: $c < 0$.
- O sinal de b é negativo: $b < 0$.
- O sinal de $\Delta = b^2 - 4ac$ positivo: $\Delta > 0$.

Problemas 4: Seja $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz às seguintes condições:

- a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ $\forall x, y$.
- b) $f(1) = 2$
- c) $f(\sqrt{2}) = 4$

Nessas condições calcule o valor de $f(3 + \sqrt{2})$.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Uma propriedade da função valendo para todos os valores x e y $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.
- b) Alguns valores da função f como $f(1) = 2$ e $f(\sqrt{2}) = 4$.

II) Organização e execução do Plano de Resolução

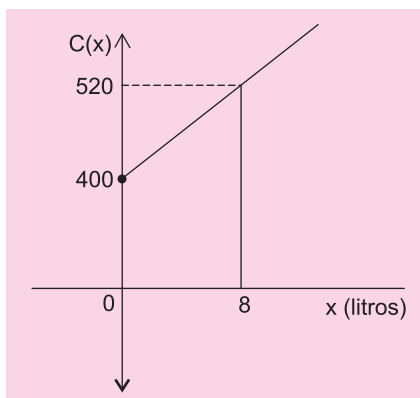
$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$; e que $f(1) = 2$, temos $f(2) = f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$, isto é $f(2) = 4$; sendo $f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1)$ e como $f(2) = 4$ e $f(1) = 2$, segue que $f(3) = 4 \cdot 2 = 8$, ou seja, $f(3) = 8$.

Portanto, o valor de $f(3 + \sqrt{2})$ pode ser obtido como segue:

$$f(3 + \sqrt{2}) = f(3) \cdot f(\sqrt{2}) = 8 \cdot 4 = 32, \text{ ou seja, } f(3 + \sqrt{2}) = 32$$

III) Verificação e confirmação da resposta: O valor de $f(3 + \sqrt{2})$ é 32.

Problema 5: O custo, c em reais, para produzir x litros de uma certa substância é dado por uma função polinomial do 1º grau em x , ($x \geq 0$) cujo gráfico está representado ao lado. Nessas condições, o custo de R\$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros?



I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Lei de formação da função do 1º grau $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$).
- b) Interpretação gráfica.
- c) Pontos que pertencem ao gráfico da função: $(0, 400)$ e $(8, 520)$.
- d) Relação entre o custo da produção e quantidade de litros.

II) Organização e execução do Plano de Resolução

Como o gráfico é de uma função do 1º grau, sua expressão é dada por $c(x) = ax + b$. Fazendo $x = 0$, temos que $c(0) = 400$ e, substituindo na expressão da função, temos: $400 = 0 + b \Rightarrow b = 400$.

Temos, ainda, que $x = 8 \Rightarrow c(8) = 520$.

Substituindo na função vem: $520 = 8a + b$.

Como $b = 400$, vem: $520 = 8a + 400$.

Resolvendo essa equação temos: $8a = 520 - 400 \Rightarrow 8a = 120 \Rightarrow$

$$a = \frac{120}{8} \Rightarrow a = 15.$$

Segue, então, que $c(x) = 15x + 400$.

Sendo o custo $c(x) = 700$, e utilizando a expressão da função, temos:

$700 = 15x + 400$. Resolvendo esta equação, obtemos: $15x = 700 - 400 \Rightarrow$

$$15x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{15} \Rightarrow x = 20.$$

III Verificação e confirmação da resposta: Para um custo de R\$ 700,00 a produção será de 20 litros.

Problema 6: A função $L(x) = a \cdot e^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.

a) Determine a função $L(x)$ sabendo que um objeto situado a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.

b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

a) Lei de formação da função exponencial $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

b) Resolução de um sistema envolvendo exponencial.

c) Relação entre o nível de iluminação e uma distância x em metros

II) Organização e execução do Plano de Resolução

a) Como por hipótese $L(x) = a \cdot e^{bx}$ e $L(1) = 60$; $L(2) = 30$, temos:

$$\begin{cases} 60 = a \cdot e^b(1) \\ 30 = a \cdot e^{2b}(2); \end{cases}$$

$$\text{dividindo (2) por (1), vem: } \frac{30}{60} = \frac{ae^{2b}}{ae^b} \text{ ou } \frac{1}{2} = e^b;$$

$$\text{Substituindo (3) em (1) vem: } 60 = a \cdot \frac{1}{2} \text{ ou } a = 120;$$

$$\text{portanto, } L(x) = 120 \cdot (e^b)^x \text{ e, como } e^b = \frac{1}{2}, \text{ temos: } L(x) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$$\text{Ou } L(x) = 120 \cdot 2^{-x}$$

b) Para um objeto que recebe 15 luxes, isto é, $L(x) = 15$, temos que:

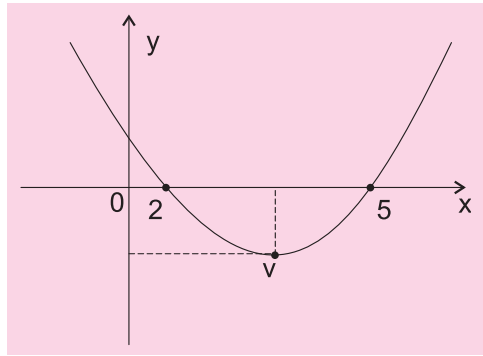
$$15 = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{15}{120} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x = 3.$$

III) Verificação e confirmação da resposta

- a) A função é $L(x) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou $L(x) = 120 \cdot 2^{-x}$.
- b) Para um objeto que recebe 15 luxes, sua distância será de 3 metros.

Problema 7: Seja f uma função definida por $f(x) = x - 1$ e g uma função dada pelo gráfico ao lado.

Determine o conjunto-solução da inequação $f(x) \cdot g(x) \geq 0$.

**I) Compreensão e interpretação:**
a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Estudo do sinal de uma função do primeiro grau $y = ax + b$.
- b) Estudo do sinal de uma função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ ($\Delta > 0$): contrário sinal de a x_1 (raiz) sinal contrário de a x_2 (raiz) mesmo sinal de a .
- c) Regra de sinais do produto:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ e } b \text{ positivos} \\ \text{ou} \\ a \text{ e } b \text{ negativos} \end{array} \right\} \Rightarrow ab > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ e } b \text{ com sinais} \\ \text{contrários} \end{array} \right\} \Rightarrow ab < 0$$

II) Organização e execução do plano de resolução.

Estudando o sinal da função $f(x) = x - 1$. Como $f(1) = 0$, 1 é raiz e portanto temos:

$$\frac{- - - - - - - - - - - | + + + + + + + + + + +}{1 \text{ (raiz)}}$$

$$\text{Para } x > 1 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Para } x < 1 \Rightarrow f(x) < 0$$

Estudando o sinal da função g :

Observando o gráfico vemos que $f(2) = f(5) = 0$. Logo 2 e 5 são raízes da função g .

$$\frac{+ + + + + + | - - - - - - | + + + + + +}{2(\text{raiz}) \quad 5(\text{raiz})}$$

Analisando o sinal de g temos: $x < 2$ ou $x > 5 \Rightarrow f(x) > 0$
 $2 < x < 5 \Rightarrow f(x) < 0$

Estudando o sinal do produto $f(x) \cdot g(x)$ temos:

f:	-----	+++++	+++++	+++++
	1	2	5	
g:	+++++	-----	+++++	
	1	2	5	
f. g:	-----	+++++	-----	+++++
	1	2	5	

Para que $f(x) \cdot g(x) \geq 0$, devemos ter $1 \leq x \leq 2$ ou $x \geq 5$.

III) Verificação e confirmação da resposta: O conjunto solução da inequação $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$

Problema 8: Os zeros da função $f(x) = x^2 - kx - k^2$ ($K \in \mathbb{R}$) são $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Determine o valor da expressão $a^4b^2 + b^4a^2$.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

a) Relações entre os coeficientes e as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$

($a \neq 0$): Se x_1 e x_2 são raízes temos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

b) Fatoração de expressões algébricas.

c) Domínio do desenvolvimento algébrico.

II) Organização e exercício do Plano de Resolução.

Como a e b são as raízes (zeros) de $f(x) = x^2 - kx - k^2$, usando as relações temos: $a + b = k$ e $ab = -k^2$; fatorando a expressão $a^4b^2 + b^4a^2 = a^2b^2(a^2 + b^2)$, como $a + b = k$, elevando ambos os membros ao quadrado, vem: $(a + b)^2 = k^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = k^2$. Sendo $ab = -k^2$, temos: $a^2 - 2k^2 + b^2 = k^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = k^2 + 2k^2 = 3k^2$.

Portanto, concluímos: $a^4b^2 + b^4a^2 = a^2b^2(a^2 + b^2) = (-k^2)^2 \cdot (3k^2) = k^4 \cdot (3k^2) = 3k^6$.

III) Verificação e confirmação da resposta: O valor da expressão $a^4b^2 + b^4a^2$ é $3k^6$.

Problema 9: Sejam r_1 e r_2 os zeros (raízes) da função $f(x) = x^2 - Kx + K - 1$, $K \in \mathbb{R}$. Determine o valor de K de modo que $r_1^2 + r_2^2$ assumo o valor mínimo.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

a) Relações entre os coeficientes e as raízes da função do 2º grau:

se x_1 e x_2 são raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ temos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

b) O valor mínimo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, é dado por

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

c) Domínio de operações com expressões algébricas.

II) Organização e Execução do Plano de Resolução

Sabemos que r_1 e r_2 são zeros da função $f(x) = x^2 - Kx + K - 1$. Usando as relações da soma e do produto dos zeros, temos $r_1 + r_2 = K$ e $r_1 \cdot r_2 = K - 1$.

Assim: $r_1 + r_2 = K \Rightarrow (r_1 + r_2)^2 = K^2$ e, desenvolvendo, temos $r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 = K^2$.

Mas $r_1 \cdot r_2 = K - 1$ e, então $r_1^2 + r_2^2 + 2(K - 1) = K^2 \Rightarrow r_1^2 + r_2^2 = K^2 - 2K + 2$.

O valor mínimo de $r_1^2 + r_2^2 = K^2 - 2K + 2$ é dado por $\frac{-\Delta}{4a}$ e, como

$$\Delta = 4 - 8 = -4, \text{ segue que } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

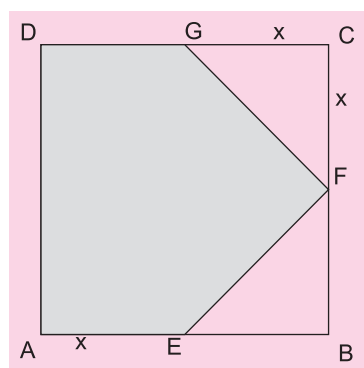
III) Verificação e confirmação da resposta: O valor de K de modo que $r_1^2 + r_2^2$ assumo o valor mínimo é 1.

Problema 10: Na figura dada ABCD é um quadrado de lado 6cm. $AE = FC = CG = x$ cm

a) **Determine o valor de x para que a área de AEFGD (área assinalada) seja a maior possível.**

b) **Para que essa área seja a maior possível, em que posição deverão ficar os pontos E, F, G?**

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).



a) Área do quadrado de lado l : $A = l^2$.

b) Área do triângulo de base b e altura h : $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

c) Abscissa do vértice do gráfico da função do 2º grau: $X_v = \frac{-b}{2a}$.

d) Determinação de ponto médio de um segmento.

II) Organização e execução de Plano de Resolução

A área assinalada é igual a área do quadrado ABCD menos as áreas dos triângulos retângulos FCG e EBF. Temos:

$$\text{Área do quadrado ABCD} = 6^2 = 36,$$

$$\text{Área do triângulo retângulo FCG} = \frac{x \cdot x}{2},$$

$$\text{Área do triângulo retângulo EBF} = \frac{(6-x)(6-x)}{2}.$$

Assim:

$$\text{Área assinalada} = 36 - \frac{x^2}{2} - \frac{(6-x)(6-x)}{2}$$

$$\text{Área assinalada} = 36 - \frac{x^2}{2} - \frac{36 - 12x + x^2}{2}$$

$$\text{Área assinalada} = \frac{72 - x^2 - 36 + 12x - x^2}{2}$$

$$\text{Área assinalada} = \frac{-2x^2 + 12x + 36}{2}$$

$$\text{Área assinalada} = -x^2 + 6x + 18.$$

- a) O valor de x para que a área assinalada seja máxima será dado por

$$X_v = \frac{-b}{2a}, \text{ ou seja, } X_v = \frac{-6}{-2} = 3;$$

- b) Como $\overline{CD} = 6$ e $\overline{CG} = x = 3$ temos que o ponto G é médio de AB . Do mesmo modo, como $\overline{BC} = 6$ e $\overline{CF} = 3$ temos que F é ponto médio de BC e como $\overline{AB} = 6$ e $\overline{AE} = 3$ temos que E é ponto médio de AB .

III) Verificação e confirmação da resposta

- a) O valor de x para que a área assinalada seja máxima é 3cm.
b) Os pontos E , F e G são pontos médios de AB , BC e CD , respectivamente.

Problema 11: A partir da zero hora de cada dia, a pressão “ p ”, em bares, de uma caldeira é controlada automaticamente, variando com o tempo

“ t ”, em horas, de acordo com a função: $p(t) = 300 + 200 \cdot \sin \frac{(t-1)\pi}{2}$.

- a) Qual é a pressão máxima dessa caldeira?
b) Qual é o primeiro horário, após a zero hora, em que a caldeira atinge a pressão máxima?

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- O valor máximo que $\text{sen} x$ assume é igual a 1.
- A expressão geral para arcos, cujo seno seja igual a 1, é $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ para $K \in \mathbb{Z}$.

II) Organização e execução do plano de resolução

- Temos $p(t) = 300 + 200 \cdot \text{sen} \frac{(t-1)\pi}{2}$.

A pressão máxima é obtida quando $\frac{\text{sen}(t-1) \cdot \pi}{2} = 1$ e, portanto, $p(\text{máxima}) = 300 + 200 \cdot 1 = 500$.

- Para $\frac{\text{sen}(t-1) \cdot \pi}{2} = 1$, temos que: $\frac{(t-1) \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$.

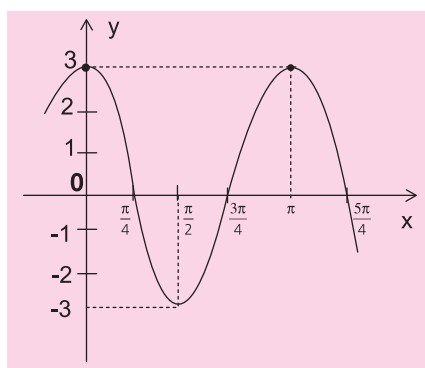
Para obtermos o primeiro horário em que a caldeira atingiu a pressão máxima, façamos $K = 0$. Logo, teremos:

$$\frac{(t-1) \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 0 \quad \text{ou} \quad (t-1) \cdot \pi = \pi \Rightarrow t-1 = 1 \Rightarrow t = 2$$

III) Verificação e confirmação da resposta.

- A pressão máxima dessa caldeira será de 500 bares.
- O primeiro horário, após a zero hora, em que a caldeira atingirá a pressão máxima, acontecerá às 2 horas.

Problema 12: Abaixo temos o gráfico da função $y = b \cdot \cos(mx)$.



- Determine os valores de b e m .
- Determine o período e a imagem da função.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- Interpretação gráfica da função cosseno.

- b) O período da função $F(x) = b \cdot \cos(mx)$ é dado por $p = \frac{2\pi}{|m|}$.

II) Organização e execução do plano de resolução

- a) Como o ponto $(0, 3)$ pertence ao gráfico da função $y = b \cos(mx)$, substituindo $x = 0$ e $y = 3$ na expressão da função, temos:
 $3 = b \cdot \cos(m \cdot 0) \Rightarrow 3 = b \cdot \cos 0$ e, como $\cos 0 = 1$, temos $3 = b \cdot 1$ ou $b = 3$.

Assim, a expressão da função toma a forma $y = 3 \cdot \cos(mx)$.

Observando o gráfico da função verificamos que $x = \pi \Rightarrow y = 3$, ou seja, $3 = 3 \cdot \cos(m\pi)$.

Logo: $\cos(m\pi) = 1 \Rightarrow m = +2$ ou $m = -2$. Portanto, a expressão da função fica: $y = 3 \cos(2x)$ ou $y = 3 \cos(-2x)$.

- b) Como o período da função $y = b \cdot \cos(mx)$ é dado por $p = \frac{2\pi}{|m|}$ e como

$$|m| = 2, \text{ vem: } p = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ é o valor do período.}$$

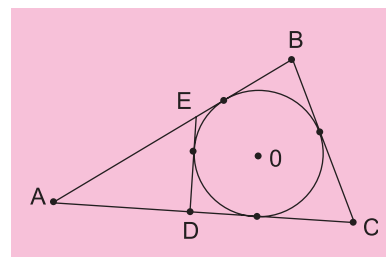
Por outro lado, também no gráfico da função, observamos que os valores de y variam entre -3 e 3 , ou seja, $\text{Im}(y) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$.

III) Verificação e confirmação da resposta

- a) Temos os valores $b = 3$ e $m = \pm 2$.
- b) O período da função é $p = \pi$ e a imagem é $\text{Im}(y) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\} = [-3, 3]$.

2.2 Geometria Euclideana (Plana e Espacial)

Problema 1: Um triângulo isósceles ABC está circunscrito a uma circunferência de centro O , que é inscrito num quadrilátero conexo $BCDE$.

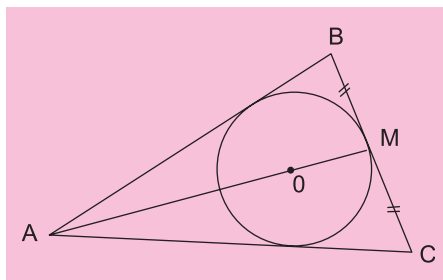


Se $AB = AC = 13\text{cm}$ e $BC = 8\text{cm}$, calcule:

- O perímetro do triângulo ADE .
- O comprimento AM da bissetriz do ângulo $\hat{A}$.
- A área do triângulo ABC .

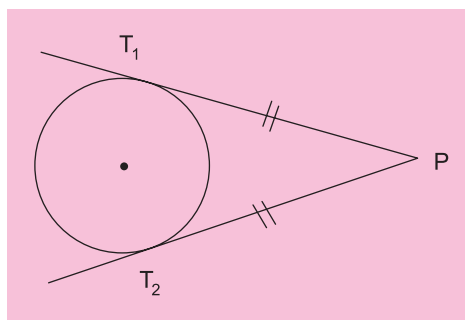
I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- Um triângulo circunscrito a uma circunferência tem seus lados tangentes à circunferência e perpendiculares aos raios nos pontos de tangência.
- Em um triângulo isósceles ABC de base BC o centro da circunferência inscrita é a interseção das bissetrizes internas e a bissetriz do ângulo A, AM, é também mediana e altura.



$AB = AC \Rightarrow AM$ é bissetriz, altura e mediana $\Rightarrow BM = MC$.

- Os dois segmentos tangentes traçados de um ponto exterior a uma circunferência são congruentes.



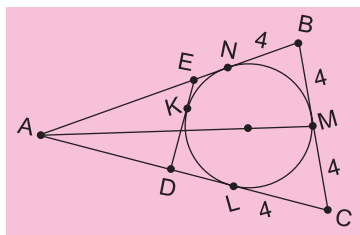
$$PT_1 = PT_2$$

- Teorema de Pitágoras: Se a, b, c são respectivamente as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.
- A área de um triângulo é igual à metade do produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo por eles formado.

II) Organização e execução do plano de resolução.

1. Cálculo do perímetro do triângulo AED

Na figura AM é a bissetriz do ângulo A, pois passa pelo centro da circunferência e, portanto, é também mediana e altura. Sendo A, B e C exterior a circunferência segue que $BM = MC = BN = CL = 4\text{cm}$. Além disso, $AL = AN = 9\text{cm}$. Também, sendo K, L, N pon-



tos de tangência, concluímos que $EN = EK$ e $DL = DK$. O perímetro do triângulo AED é $AE + EK + AD + DK = AE + EN + AD + DL = AN + AL = 9 + 9 = 18$ cm.

2. Cálculo da medida do comprimento da bissetriz do ângulo A

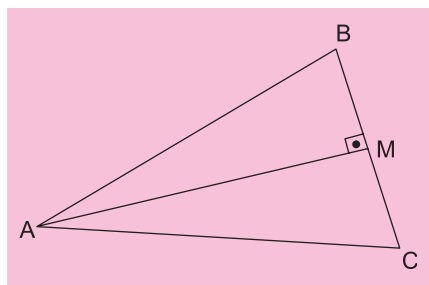
Como o triângulo é isósceles com base BC , a bissetriz AM é altura e mediana. Então o triângulo AMB é retângulo em M . Sendo $AB = 13$ cm e $BC = 8$ cm segue que $BM = 4$ cm e assim pelo teorema de Pitágoras temos $AB^2 = AM^2 + BM^2$ ou $13^2 = AM^2 + 4^2$. Segue que $AM^2 = 169 - 16 = 153$. Portanto $AM = \sqrt{153}$ cm.

3. Cálculo da área do triângulo ABC

No triângulo retângulo AMB temos:

$$AM = \sqrt{153} \text{ cm} \quad AB = 13 \text{ cm} \text{ e } BM = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Então } \sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{4}{13} \text{ e } \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{13}.$$



$$\text{Sendo } \sin \hat{A} = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}, \text{ concluímos que } \sin \hat{A} = 2 \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{\sqrt{153}}{13}$$

$$\text{ou } \sin \hat{A} = \frac{8\sqrt{153}}{169}$$

$$\text{A área do triângulo ABC } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A. \text{ Temos } S = \frac{1}{2} 13 \cdot 13 \cdot \frac{8\sqrt{153}}{169} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{169 \cdot 8\sqrt{153}}{169} = 4\sqrt{153}. \text{ Portanto } S = 4\sqrt{153} \text{ cm}^2$$

Outra maneira (mais simples) de calcular a área do triângulo ABC: Sendo a altura $AM = \sqrt{153}$ cm e a base $BC = 8$ cm, a área S é igual a:

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{153} \cdot 8 = 4\sqrt{153} \text{ ou } S = 4\sqrt{153} \text{ cm}^2$$

III) Verificação e confirmação da resposta

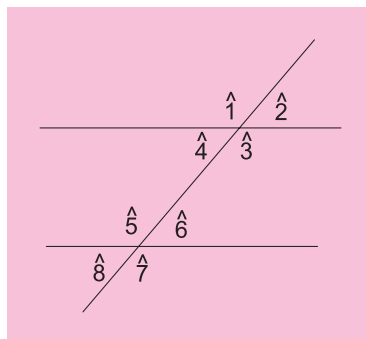
- a) O perímetro do triângulo ADE é 18cm.
- b) O comprimento da bissetriz AM é $\sqrt{153}$ cm.
- c) A área do triângulo ABC é $4\sqrt{153}$ cm².

Problema 2: Demonstre que em qualquer triângulo a soma das medidas de seus ângulos internos é igual a 180°.**I. Compreensão e interpretação:** a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

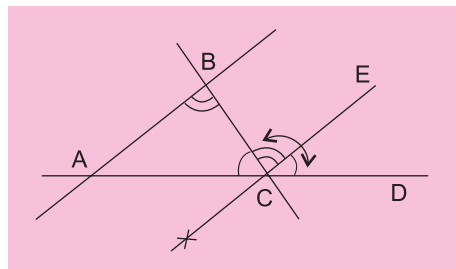
- a) Se duas retas paralelas distintas intersectam transversalmente uma outra reta determinando os 8 ângulos, como na figura ao lado, temos as igualdades:

$$1 = 3 = 5 = 7$$

$$2 = 4 = 6 = 8$$

**II. Organização e execução do plano de resolução**

Seja ABC um triângulo qualquer, cujos ângulos internos demonstraremos por A, B e C. Prolonguemos o lado AC, formando o ângulo $\hat{e} = \angle BCD$. (O ângulo $\hat{e}$ é chamado de ângulo externo). Tracemos uma paralela ao lado AB pelo vértice C. Observemos que $C + \hat{e} = 180^\circ$.



Além disso, considerando as paralelas AB e CE e a transversal BC temos que $\hat{B} = \angle BCE$.

Agora, considerando AC como reta transversal temos que $\hat{A} = \angle ECD$. Dessas igualdades e considerando que $\hat{e} = \angle BCD = \angle BCE + \angle ECD$, concluímos que $\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$.

Então sendo $\hat{e} + \hat{C} = 180^\circ$, segue que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Problema 3: O perímetro do triângulo ABC é 100m. A bissetriz interna do ângulo A, divide o lado oposto BC em dois segmentos medindo 16m e 24m. Determine as medidas dos lados deste triângulo.**I. Compreensão e interpretação:** a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Se a bissetriz interna do ângulo A do triângulo ABC intercepta o lado

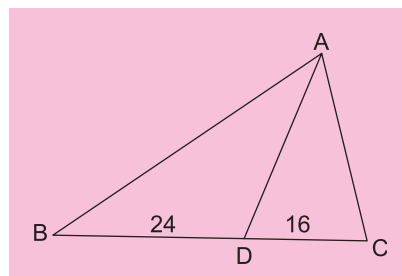
BC no ponto D, então $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ (Teorema da Bissetriz interna)

- b) Em toda proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro. Ou

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

II. Organização e execução do plano de resolução

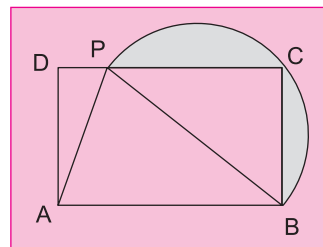
Seja ABC o triângulo considerado e AD a bissetriz do ângulo A. Temos que BC mede 40m. Portanto, sendo o perímetro igual a 100m, a soma das medidas dos lados AB e AC é 60m.



Pelo Teorema da bissetriz interna temos: $\frac{AB}{24} = \frac{AC}{16}$ ou $\frac{AB}{AC} = \frac{24}{16}$. Decorre desta igualdade que $\frac{AB+AC}{AB} = \frac{24+16}{24}$ ou $\frac{AB+AC}{AB} = \frac{40}{24}$, então, sendo $AB+AC = 60$, obtemos $\frac{60}{AB} = \frac{40}{24}$. Concluimos que AB mede 36m. Assim AC mede 24m.

III. Verificação e confirmação da resposta: Os lados do triângulo medem 40m, 36m e 24m.

Problema 4: Sejam ABCD um retângulo, P um ponto de DC, tal que $PB = AB$ e o arco PCB uma semicircunferência. Se a área do triângulo PCB é 4 vezes a área do triângulo APD, determine o perímetro do contorno da região sombreada sabendo que a área do triângulo ABP é $4,8\text{m}^2$.



- I) Compreensão e interpretação:** a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações)
- Se dois triângulos possuem alturas com o mesmo comprimento, a razão entre suas áreas é a razão entre suas bases.
 - Se a, b e c são as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).
 - O comprimento de uma semicircunferência de raio R é πR .

II) Organização e execução do plano de resolução

Observe que os triângulos APD e BPC possuem alturas com o mesmo comprimento e assim considerando a razão entre suas áreas concluímos que $PC = 4PD$. Temos então as igualdades: $PB = AB = CD = PC +$

$\overline{PD} = 4\overline{PD} + \overline{PD} = 5\overline{PD}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BPC temos: $\overline{PB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{PC}^2$ e usando as igualdades acima: $25\overline{PD}^2 = \overline{BC}^2 + 16\overline{PD}^2$. Assim $9\overline{PD}^2 = \overline{BC}^2$ ou $\overline{BC} = 3\overline{PD}$. Como a área do triângulo ABP e $4,8\text{m}^2$ temos $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 9,6\text{m}^2$. Substituindo os valores de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ temos $5\overline{PD} \cdot 3\overline{PD} = 9,6$ ou $\overline{PD}^2 = \frac{9,6}{15} = 0,64$. Segue que $\overline{PD} = 0,8\text{m}$.

Então $\overline{PB} = 5\overline{PD} = 5 \cdot 0,8 = 4\text{m}$, $\overline{PC} = 4\overline{PD} = 3,2\text{m}$ e $\overline{BC} = 3\overline{PD} = 2,4\text{m}$

O perímetro procurado é $2,4\text{m} + 3,2\text{m} + 2\pi\text{m} = (5,6 + 2\pi)\text{m}$

Usamos que o raio da semicircunferência é $\frac{\overline{PB}}{2} = 2\text{m}$

III) Verificação e confirmação da resposta

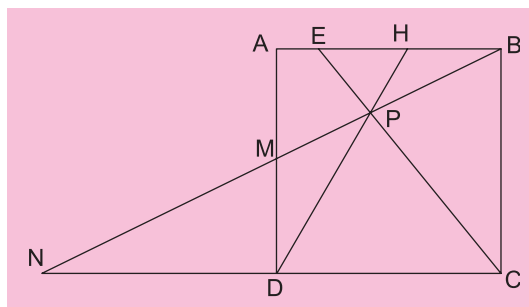
Como raio da semi-circunferência é $R = 2\text{m}$ então o comprimento de $\overline{PCB} = \frac{2\pi \cdot 2}{2} = 2\pi$ e, considerando ainda que, $\overline{PC} = 3,2\text{m}$ e $\overline{BC} = 2,4$

obteremos que o perímetro da região sombreada e a soma das medidas: $\overline{PC} + \overline{BC} + \overline{PCB} = 3,2\text{m} + 2,4\text{m} + 2\pi\text{m} = 5,6\text{m} + 2\pi\text{m} \cong 11,88\text{m}$, o que comprova a resposta dada.

Problema 5: Seja ABCD um quadrado, M o ponto médio de AD e E um ponto sobre o lado AB. Se P é a interseção de EC e MB, mostre que a reta DP divide o segmento EB em dois segmentos de mesma medida.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então eles são congruentes.
- Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes eles são semelhantes.



II) Organização e execução do plano de resolução

Seja N a interseção do prolongamento do lado CD com o prolongamento do segmento BM. Os triângulos MND e MAB são congruentes. Segue que AB e DN são congruentes e assim D é o ponto médio do segmento CN. Seja H o ponto onde DP encontra o lado AB. Os triângulos

DNP e BHP são semelhantes. Segue que $\frac{\overline{BH}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{DP}}$... (1) Também os triân-

gulos HEP e CDP são semelhantes e portanto $\frac{\overline{EH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{DP}} \dots (2)$. De (1) e (2) segue que $\frac{\overline{EH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{ND}}$. Como $\overline{ND} = \overline{BC}$ segue que $\overline{EH} = \overline{BH}$.

Problema 6: Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são os vértices de um paralelogramo cuja área é a metade da área do quadrilátero dado.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes então os triângulos são semelhantes.
- Se duas retas r e s são interceptadas por uma reta transversal formando ângulos correspondentes congruentes as retas r e s são paralelas.
- Se a e b são as medidas dos lados de um triângulo e α é o ângulo por eles formado, então a área do triângulo é dado por $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.

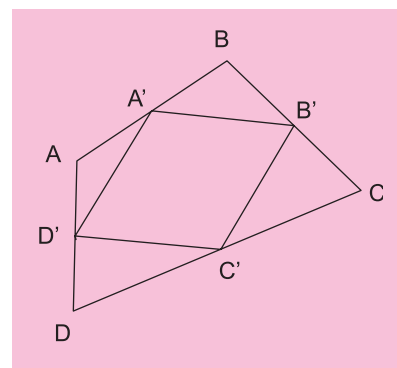
II) Organização e execução do plano de resolução

Seja ABCD um quadrilátero e, A', B', C', D' os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA.

Veja que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'B$ são semelhantes, pois o ângulo $\hat{B}$ é comum aos dois triângulos e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BB'}}$. Distó segue

que os ângulos $\hat{B'B'A'}$ e $\hat{B'CA}$ são congruentes e assim $\overline{A'B'}$ é paralelo a $\overline{AC}$... (1). De maneira análoga, considerando agora os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle D'C'D$ conclui-se que $\overline{D'C'}$ e $\overline{AC}$ são paralelos (2). Segue de (1) e (2) que $\overline{A'B'}$ e $\overline{D'C'}$ são paralelos. Com o mesmo raciocínio e considerando os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'D'D$; e $\triangle DBC$ e $\triangle B'C'C$ mostra-se que $\overline{A'D'}$ e $\overline{B'C'}$ são paralelos e assim conclui-se que $A'B'C'D'$ é um paralelogramo.

Mostraremos agora que a soma das áreas dos triângulos $\triangle A'B'B$ e $\triangle D'D'C'$ é igual à quarta parte da área do quadrilátero ABCD. Para isto seja S_1 a área do triângulo $\triangle A'B'B$ e S_2 a área do triângulo $\triangle D'D'C'$. Temos $S_1 = \frac{1}{2} \overline{A'B'} \cdot \overline{BB'} \cdot \sin \hat{B}$ e $S_2 = \frac{1}{2} \overline{A'B'} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \hat{B}$. Sendo $\overline{A'B'} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ e $\overline{BB'} = \frac{1}{2} \overline{BC}$, concluímos que $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{4} S_2$. De maneira análoga, conclui-se que a área do triângulo $\triangle D'D'C'$ é a quarta



parte da área dos triângulos ADC. Sendo a área do quadrilátero igual à soma das áreas do triângulo ABC e ADC concluímos que $\text{área}(A'B'B') + \text{área}(D'D'C') = \frac{1}{4} \text{área}(ABC) + \frac{1}{4} \text{área}(ADC) = \frac{1}{4} \text{área}(ABCD)$ (I)

Com raciocínio análogo mostra-se que a área $(A'A'D') + \text{área}(B'C'C) = \frac{1}{4} \text{área}(ABCD)$... (II). Considerando-se (I) e (II) conclui-se que a soma das áreas dos triângulos $A'B'B'$, $D'D'C'$, $A'A'D'$ e $B'C'C$ é a metade da área do quadrilátero ABCD. Como a área do paralelogramo $A'B'C'D'$ é a área do quadrilátero menos a soma das áreas desses quatro triângulos segue que a área do paralelogramo $A'B'C'D'$ é a metade da área do quadrilátero ABCD.

Problema 7: Calcule a área lateral, a área total e o volume de um tronco de pirâmide regular de bases paralelas e quadradas, cuja aresta lateral mede 10m, a aresta da base maior mede 15m e a da base menor 3m.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- Se a, b e c são as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. (Teorema de Pitágoras).
- Se B e b são as medidas dos comprimentos da base maior e da base menor de um trapézio de altura h, então sua área é dada por $\frac{B+b}{2}h$.
- O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base pela altura.

II) Organização e execução do plano de resolução

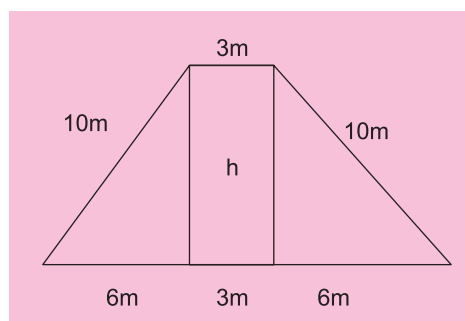
1. Cálculo da área lateral e da área total. Cada face lateral do tronco é um trapézio cuja base maior mede 15m, a base menor 3m e cada um dos lados não paralelos mede 10m.

Assim a área de cada face lateral é $A_j = \frac{15+3}{2} \cdot h$. Como o trapézio é isósceles, usando Pitágoras obtemos $h^2 = 100 - 36 = 64$ ou $h = 8m$.

Portanto, $A_j = 9 \cdot 8 = 72m^2$

A área lateral do tronco é portanto $A = 4 \cdot 72 = 288m^2$.

Para obter a área total, basta somar à área lateral a área das duas bases. A área da base maior é 15^2m^2 ou $225m^2$. Analogamente a área da base menor é $3^2 = 9m^2$. Assim a área total é $(288 + 225 + 9)m^2$ ou $522m^2$.

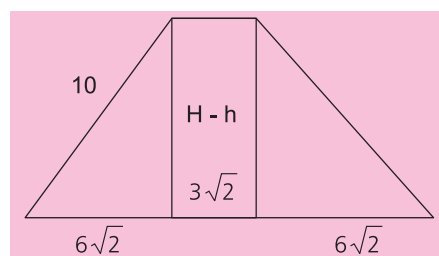


2. Cálculo do Volume

Para calcular o volume, vamos construir uma pirâmide regular prolongando as arestas laterais do tronco. O prolongamento das arestas laterais se encontram no ponto V que é o vértice da pirâmide construída. O volume do tronco é, então, igual ao volume desta pirâmide menos o volume da pirâmide menor cujo vértice é V e a base é a base menor do tronco. Se H e h são as alturas da pirâmide maior e a da pirâmide menor

respectivamente, temos: $\frac{H}{h} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{H}{h} = \frac{15}{3} = 5$. Logo $H = 5h \dots (1)$

Considere agora o trapézio cuja base maior seja a diagonal da base maior do tronco e cuja base menor seja a diagonal da base menor do tronco. Para este trapézio, a altura é $H - h$. Temos então para este trapézio: base maior igual a $15\sqrt{2}$ m e base menor $3\sqrt{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras temos:
 $(H - h)^2 + (6\sqrt{2})^2 = 100 \Rightarrow$
 $(H - h)^2 = 100 - 72 = 28$ ou
 $H - h = 2\sqrt{7} \dots (2)$



De (1) e (2) temos: $5h - h = 2\sqrt{7}$ ou $4h = 2\sqrt{7}$, $h = \frac{\sqrt{7}}{2}$ m e assim de

$$(1) H = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ m}$$

Se V é o volume da pirâmide maior e V' o volume da menor temos:

$$V - V' = \frac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{3} 9 \frac{\sqrt{7}}{2} = 5 \cdot 15 \cdot 5 \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2} = (375 - 3) \frac{\sqrt{7}}{2} =$$

$$372 \frac{\sqrt{7}}{2} = 186\sqrt{7} \text{ m}^3$$

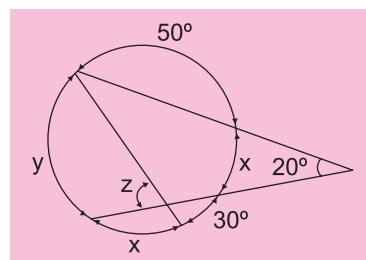
O volume do tronco é, portanto, igual a $186\sqrt{7} \text{ m}^3$.

Problema 8: Na figura, x e y são as medidas (em graus) dos correspondentes arcos e z é a medida (em graus) do ângulo assinalado.

Determine a medida de $x + y + z$.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

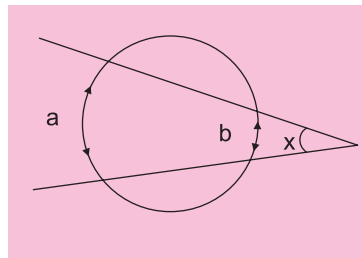
a) Ângulo excêntrico externo é um ângulo com vértice no exterior da circunferência e cujos lados são secantes à circunferência.



Temos $x = \frac{a-b}{2}$; a e b são as medidas dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo.

- b) Ângulo excêntrico interior é um ângulo com vértice no interior da circunferência.

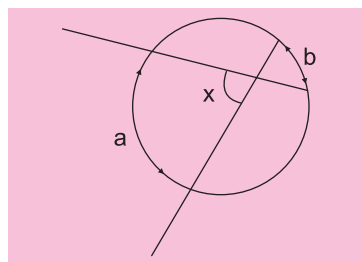
Temos: $x = \frac{a+b}{2}$ onde a e b são as medidas (em graus) dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e entre os lados do seu ângulo oposto pelo vértice.



II) Organização e execução do plano de resolução

Considerando as medidas dos ângulos excêntricos interior e exterior, temos as

igualdades: $20 = \frac{y-x}{2}$ e $z = \frac{y+30}{2} \dots (1)$



Além disso, como a medida total da circunferência é 360° , temos: $2x + 80 + y = 360$ ou $2x + y = 280$.

Considerando esta igualdade e a primeira igualdade de (1), temos o

sistema:
$$\begin{cases} y - x = 40 \\ y + 2x = 280 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $x = 80^\circ$ e $y = 120^\circ$. Substituindo o

valor de y em (1), obtemos $z = \frac{120 + 30}{2} = \frac{150}{2} = 75^\circ$

III) Verificação e confirmação da resposta

Temos, então, que $x + y + z = 80 + 120 + 75 = 275^\circ$

Problema 9: Um vaso com a forma de um cilindro circular reto, contém água até a altura de 19cm. Se a altura do vaso é 20cm e o raio da base mede 5cm, determine:

- O número máximo de esferas de aço com 1cm de raio que podemos colocar dentro do vaso sem que a água transborde.
- O volume de água que transbordará ao colocarmos dentro do vaso 22 esferas iguais às do item anterior.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- O volume de um cilindro circular reto com altura h e raio da base R é dado por $V = \pi R^2 h$.

- O volume de uma esfera de raio R é dado por $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

II) Organização e execução do plano de resolução

- a) Se n é o número de esferas que podem ser colocadas no vaso, o volume

dessas esferas é $V = n \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{4\pi n}{3} \text{ cm}^3$.

O volume do vaso não ocupado pela água é $V' = \pi 5^2 \cdot 1 = 25\pi$.

Devemos ter $\frac{4\pi n}{3} \leq 25\pi \text{ cm}^3$, ou $n < \frac{75}{4} = 18,75$. Então $n = 18$.

- b) Se colocarmos 22 esferas no vaso, estamos adicionando um volume de $22 \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{88}{3} \pi \text{ cm}^3$. Sendo o volume não ocupado pela água igual a

$$25\pi \text{ cm}^3, \text{ a quantidade de água que transbordará é: } \left(\frac{88}{3} \pi - 25\pi \right) \text{ cm}^3 \\ = \frac{13\pi}{3} \text{ cm}^3$$

III) Verificação e confirmação da resposta.

- a) Podemos colocar no vaso sem que a água transborde, no máximo, 18 esferas.
- b) Se colocarmos 22 esferas no vaso, $\frac{13}{3} \pi \text{ cm}^3$ de água transbordará.

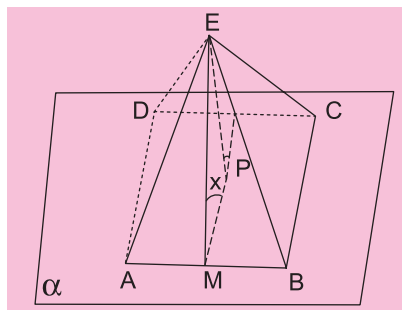
Problema 10: Sejam A, B, C, D e E cinco pontos não coplanares tais que A, B, C e D sejam vértices de um quadrado de lado 3m e os segmentos AE, BE, CE, DE e AB são congruentes. Se M é o ponto médio de AB, determine a medida do ângulo agudo que a reta EM forma com a interseção do plano ABC com o plano EMP, onde P é o centro do quadrado ABCD. Determine o volume da pirâmide cujos vértices são os pontos A, B, C, D, e E.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Por três pontos distintos que não estão em linha reta passa um único plano.
- b) A interseção de dois planos distintos e não paralelos é uma reta.
- c) Se a , b e c são respectivamente a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, então temos a relação $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).
- d) Se E, F, G e H são pontos distintos em um plano α e I é um ponto fora de α , então E, F, G, H e I são vértices de uma pirâmide.
- e) O volume de uma pirâmide cuja área da base mede B e a altura mede h é $V = \frac{1}{3} B \cdot h$.

II) Organização e execução do plano de resolução

Pelo enunciado do exercício, temos que os pontos A, B, C, D e E são vértices de uma pirâmide cuja base é o quadrado ABCD, cuja medida do lado é 3m. Além disso, a medida das arestas laterais da pirâmide também medem 3m.



Sendo o triângulo EMB retângulo em M com $EB = 3\text{m}$ e $MB = \frac{3}{2}\text{m}$, temos pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{EM}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{MB}^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$ ou $EM = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{m}$. Também $\overline{MP}$ é a metade de BC, isto é, $\overline{MP} = \frac{3}{2}\text{m}$. Segue pelo Teorema de Pitágoras que a altura da pirâmide $\overline{EP}$ é igual a:

$$\overline{EP} = \sqrt{\overline{EM}^2 - \overline{MP}^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{m}$$

Das considerações acima, podemos afirmar:

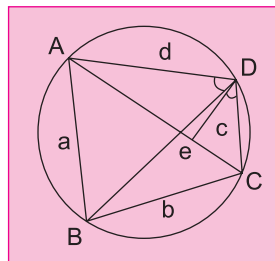
- 1) $\cos x = \frac{\overline{MP}}{\overline{EM}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Portanto $x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 2) O volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ m}^3$.

III) Verificação e confirmação da resposta

1. O ângulo agudo que a reta EM faz com a interseção do plano ABC com o plano EMP é o ângulo cujo cosseno é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. O volume da pirâmide ABCDE é igual a $\frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ m}^3$.

Problema 11: Se ABCD é um quadrilátero inscrito de diagonais AC e BD, então $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ (Teorema de Ptolomeu)

- I) **Compreensão e interpretação:** a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).
 - a) Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.



- b) Se dois triângulos são semelhantes, então os lados opostos a ângulos congruentes são proporcionais.

II) Organização e execução do plano de resolução.

Seja E o ponto da diagonal AC tal que $\widehat{E\hat{D}C} = \widehat{A\hat{D}B}$. O ângulo $\widehat{DAC}$ é congruente ao ângulo $\widehat{A\hat{D}B}$. O ângulo $\widehat{DAC}$ é congruente ao ângulo $\widehat{D\hat{B}C}$. O ângulo $\widehat{ADE}$ é congruente ao ângulo $\widehat{C\hat{D}B}$. Dessas congruências concluímos que os triângulos DEC e ADB são semelhantes. O mesmo ocorre com o triângulos ADE e BCD. Dessas semelhanças concluímos as relações: $\overline{EC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC}$ e $\overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$. Somando membro a membro essas igualdades concluímos: $\overline{EC} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$ ou $(\overline{EC} + \overline{AE}) \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$ ou $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$.

2.3 Geometria Analítica

Problema 1: Sejam $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$ pontos quaisquer no plano cartesiano, não coincidentes dois a dois e não colineares. Obter:

- Uma expressão determinante da área do triângulo ABC.
- Uma expressão determinante da colinearidade dos três pontos A, B e C.
- A equação da reta que passa por dois pontos quaisquer $P(p_1, p_2)$ e $Q(q_1, q_2)$.

I) Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

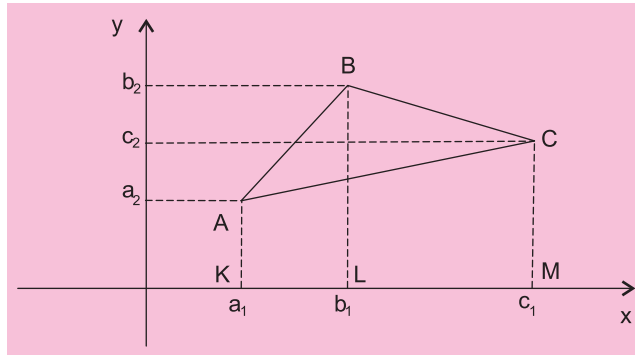
- Conhecimentos básicos de coordenadas num plano cartesiano.
- Se b_1 e b_2 são as medidas das bases e h é a medida da altura de um trapézio, então sua área é dada pela “fórmula”: $\text{área (trapézio)} = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$.

- Determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 - u_2 v_1 w_3 - u_1 v_3 w_2.$$

II) Organização e execução do plano de resolução.

Item a) Apresentamos uma figura que ilustra a situação:



Observação: não há perda de generalidade em função da localização escolhida para os pontos A, B e C.

Apresentamos, a seguir, a área do triângulo ABC em função das áreas dos trapézios ABLK, BCML e ACMK:

$$\text{área (ABC)} = \text{área(ABLK)} + \text{área (BCML)} - \text{área (ACMK)}$$

Encontramos, em seguida, as áreas dos trapézios:

$$\text{Área(ABLK)} = \frac{a_2 + b_2}{2} \cdot (b_1 - a_1) = \frac{a_2 b_1 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - a_1 b_2}{2}$$

$$\text{Área(BCML)} = \frac{b_2 + c_2}{2} \cdot (c_1 - b_1) = \frac{b_2 c_1 + c_1 c_2 - b_1 b_2 - b_1 c_2}{2}$$

$$\text{Área (ACMK)} = \frac{a_2 + c_2}{2} \cdot (c_1 - a_1) = \frac{a_2 c_1 + c_1 c_2 - a_1 a_2 - a_1 c_2}{2}$$

Obtemos, então, a área do triângulo ABC:

$$\begin{aligned} \text{Área (ABC)} &= \frac{a_2 b_1 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - a_1 b_2}{2} + \frac{b_2 c_1 + c_1 c_2 - b_1 b_2 - b_1 c_2}{2} \\ &\quad - \frac{a_2 c_1 + c_1 c_2 - a_1 a_2 - a_1 c_2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Área (ABC)} = \frac{a_1 c_2 + b_2 c_1 + a_2 b_1 - a_1 b_2 - b_1 c_2 - a_2 c_1}{2} \text{ e, usando os conhe-}$$

cimentos e notações de determinante e de valor absoluto (módulo), expressamos a área do triângulo ABC como segue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = a_1 b_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1 - b_2 c_1 - a_1 c_2 - a_2 b_1$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{área (ABC)} = |S|.$$

- b) Quando os três pontos A, B e C são colineares, pertencentes a uma reta não vertical r , os coeficientes angulares m_{AB} e m_{AC} são iguais, isto é, $m_{AB} = m_{AC} = m_r$.

A partir das expressões $m_{AB} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ e $m_{AC} = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1}$, temos:

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1} \Rightarrow b_2 c_1 - b_2 a_1 - a_2 c_1 + a_1 a_2 = b_1 c_2 - b_1 a_2 - a_1 c_2 + a_1 a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 c_2 + b_1 a_2 + c_1 b_2 - a_1 b_2 - b_1 c_2 - c_1 a_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ que é a}$$

expressão determinante da colinearidade dos três pontos A, B e C.

Observação: Se os três pontos A, B e C estiverem numa mesma reta vertical, teremos $a_1 = b_1 = c_1 = k$ e, então, o determinante,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & a_2 & 1 \\ k & b_2 & 1 \\ k & c_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ também será nulo.}$$

- c) Sejam r a reta (não vertical) que contém os pontos $P(p_1, p_2)$ e $Q(q_1, q_2)$ e um ponto genérico $K(x, y)$.

Utilizando a expressão obtida no item anterior, temos:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p_1 q_2 + p_2 x + q_1 y - q_2 x - p_1 y - q_1 p_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y + p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0, \text{ que é a equação da reta } r.$$

III) Verificação e confirmação da resposta

a) Área (ABC) = $|S|$ onde $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$

b) Condição de colinearidade dos pontos A, B e C:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c) Equação da reta que contém os pontos P e Q:
$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou,}$$

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y + (p_1q_2 - p_2q_1) = 0.$$

Problema 2: Obter as equações das linhas do plano cartesiano e identificá-las, sabendo que são representadas pela equação $x^2 - y^2 + 5x - 5y = 0$.

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- São utilizados na resolução desta questão os seguintes fatos envolvendo expressões algébricas: propriedade distributiva do produto com relação à soma e à diferença e o produto de duas expressões é nulo se, e somente se, uma das duas é nula ou ambas são nulas.
- Duas retas do plano cartesiano representadas pelas equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, são perpendiculares se, e somente se, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

II. Organização e execução do plano de resolução

A equação dada é transformada até obtê-la na forma de um produto nulo de expressões algébricas, como segue:

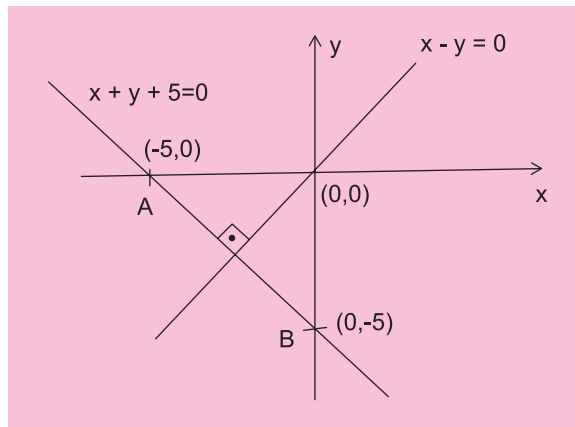
$$x^2 - y^2 + 5x - 5y = 0 \Rightarrow (x + y) \cdot (x - y) + 5(x - y) = 0 \Rightarrow$$

$$(x + y + 5) \cdot (x - y) = 0 \Rightarrow x + y + 5 = 0 \text{ e/ou } x - y = 0.$$

A equação $x - y = 0$ representa uma reta passando na origem (0, 0) do sistema de coordenadas e dividindo ao meio os 1º e 3º quadrantes.

A equação $x + y + 5 = 0$ também representa uma reta que cruza o eixo dos x (das abscissas) no ponto A (-5, 0) e cruza o eixo dos y (das ordenadas) no ponto B(0, -5). Como é nula a soma dos produtos dos coeficientes de x e de y das equações das duas retas, isto é, $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, concluímos que as duas retas são perpendiculares.

A figura abaixo ilustra a situação abordada na questão:



III. Verificação e confirmação da resposta

As linhas representadas pela equação dada são $x + y + 5 = 0$ e $x - y = 0$, que correspondem a duas retas (perpendiculares) no plano cartesiano.

Problema 3: Sejam r a reta do plano cartesiano cuja equação é $x - y = 0$, s a reta paralela à r e que contém o ponto $K(0, k)$ com $k > 0$ e $P(p_1, p_2)$ um ponto não pertencente à reta s .

Determinar o ponto Q simétrico ao ponto P em relação à reta r .

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

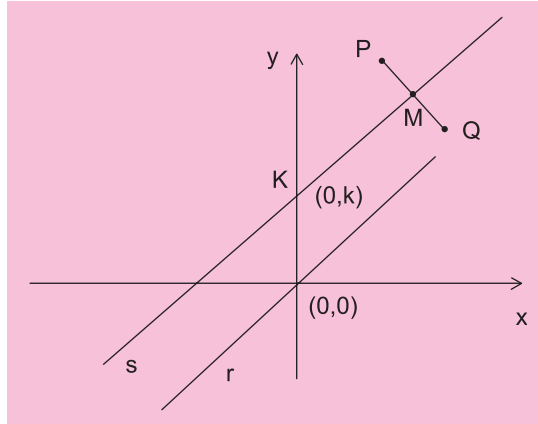
- As equações de duas retas paralelas (não verticais) podem ser colocadas nas formas $ax + by + c_1 = 0$ e $ax + by + c_2 = 0$ ou $y = mx + d_1$ e $y = mx + d_2$, respectivamente.
- As equações de duas retas perpendiculares (não paralelas aos eixos coordenados) podem ser colocadas nas formas $y = mx + n_1$ e $y = -\frac{1}{m}x + n_2$.
- A equação da reta que possui coeficiente angular m e que contém o ponto $P(x_0, y_0)$ pode ser expressa como segue: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.
- As coordenadas do ponto médio $M(u_1, u_2)$ do segmento PQ , onde $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ podem ser obtidas como segue:

$$u_1 = \frac{p_1 + q_1}{2} \text{ e } u_2 = \frac{p_2 + q_2}{2}.$$

- Resolução de um sistema de equações.

II. Organização e execução do plano de resolução

a) Apresentamos um gráfico ilustrativo da situação estudada



b) Obtenção da equação da reta s:

Como r e s são paralelas, a equação de r é $x - y = 0$ e o ponto $K(0, k)$ pertence a reta s, temos s: $x - y + c = 0$ e $0 - k + c = 0$, ou seja, s: $x - y + k = 0$.

c) Obtenção da equação da reta l que contém o ponto P e é perpendicular a r e s: $y - p_2 = m_l(x - p_1)$, com $m_l \cdot m_r = -1$ ($m_r = m_s = 1$ e, portanto, $m_l = -1$) $y - p_2 = (-1) \cdot (x - p_1)$, ou seja, $x + y + p_1 - p_2 = 0$ que é a equação da reta l.

d) O ponto M pode ser determinado, então, resolvendo o sistema (com

$$\text{variáveis } x \text{ e } y) \begin{cases} x - y + k = 0 \\ x + y + p_1 - p_2 = 0 \end{cases}$$

conforme procedimento que mostramos em seguida:

adicionando as duas equações, vem $2x + k + p_1 - p_2 = 0$; subtrain-

do as duas equações, vem $2y - k + p_1 - p_2 = 0$; daí $x = \frac{p_2 - p_1 - k}{2}$ e y

$$= \frac{p_2 - p_1 + k}{2}, \text{ ou seja, } M = \left(\frac{p_2 - p_1 - k}{2}, \frac{p_2 - p_1 + k}{2} \right).$$

e) Assim, como M é o ponto médio do segmento PQ, o ponto Q pode ser obtido como segue:

$$P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2) \text{ e } M \left(\frac{p_2 - p_1 - k}{2}, \frac{p_2 - p_1 + k}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{p_2 - p_1 - k}{2} = \frac{p_1 + q_1}{2} \text{ e } \frac{p_2 - p_1 + k}{2} = \frac{p_2 + q_2}{2} \Rightarrow p_2 - p_1 - k = p_1 + q_1 \text{ e}$$

$$p_2 - p_1 + k = p_2 + q_2 \Rightarrow q_1 = p_2 - 2p_1 - k \text{ e } q_2 = k - p_1, \text{ ou seja,}$$

$$Q = (p_2 - 2p_1 - k, k - p_1).$$

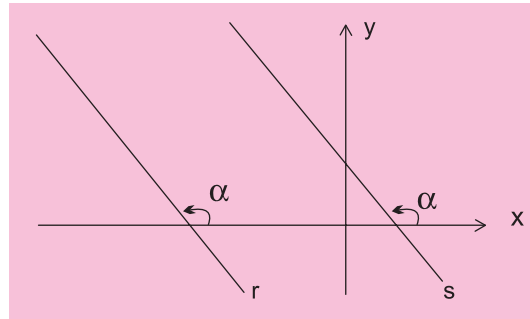
III. Verificação e confirmação da resposta: O ponto procurado é $Q(p_2 - 2p_1 - k, k - p_1)$.

Problema 4: Os pontos A(5, 5), B(6, 1) e C(-1, -2) são três vértices consecutivos do paralelogramo ABCD. Determinar:

- As coordenadas do ponto D, quarto vértice do paralelogramo.
- A área do paralelogramo.

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- As retas cujas equações são $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são paralelas se, e somente se, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$; no caso de retas paralelas não verticais, suas equações podem ser colocadas nas formas $y = mx + d_1$ e $y = mx + d_2$, onde m é o coeficiente angular ($m = \text{tg}d$).



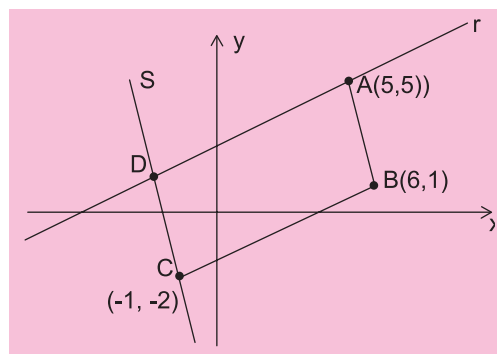
- A área do triângulo cujos vértices são $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$ pode ser obtida como segue:

$$\text{área (ABC)} = |S|, \text{ onde } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ (para o cálculo é necessário}$$

conhecer o desenvolvimento de determinante de ordem 3).

II. Organização e execução do plano de resolução

- Apresentamos uma figura ilustrativa da situação.



Como a reta r , passando pelo vértice A é paralela ao segmento BC , obtemos sua equação como segue:

$m_r = m_{BC} = \frac{1 - (-2)}{6 - (-1)} = \frac{3}{7}$ (coeficiente angular de r) e, como as coordenadas de A satisfazem a equação $y = \frac{3}{7}x + k$, temos $5 = \frac{3}{7} \cdot 5 + k \Rightarrow k = 5 - \frac{15}{7} = \frac{20}{7}$ donde obtemos a equação $y = \frac{3}{7}x + \frac{20}{7}$ ou $3x - 7y + 20 = 0$ da reta r .

Com a reta s passando pelo vértice C é paralela ao segmento AB , obtemos sua equação como segue:

$m_s = m_{AB} = \frac{5 - 1}{5 - 6} = \frac{4}{-1} = -4$ (coeficiente angular de s) e, como as coordenadas de C satisfazem a equação $y = -4x + k$, temos $-2 = -4 \cdot (-11) + k \Rightarrow k = -6$ donde obtemos a equação $y = -4x - 6$ ou $4x + y + 6 = 0$ da reta s .

Encontramos as coordenadas do ponto D resolvendo o sistema das equações das retas r e s , como segue:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 20 = 0 \\ 4x + y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{(utilizando o método da substituição)}$$

$y = -4x - 6 \Rightarrow 3x - 7(-4x - 6) + 20 = 0 \Rightarrow 3x + 28x + 42 + 20 = 0 \Rightarrow 31x + 62 = 0 \Rightarrow x = -2$ e, então, $y = -4 \cdot (-2) - 6 = 8 - 6 = 2$, ou seja, $(-2, 2)$ são as coordenadas do vértice D .

b) A área do paralelogramo $ABCD$ é o dobro da área do triângulo ABC e, portanto, podemos calculá-la como segue:

Área($ABCD$) = 2 . Área(ABC) = 2 $|S|$, em que:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (5 - 12 - 5 + 1 + 10 - 30) \Rightarrow S = \frac{1}{2} (-42 + 11) = -\frac{31}{2}$$

ou seja, área($ABDC$) = 2 . $\frac{31}{2}$ = 31 unidades de área.

III. Organização e execução do plano de resolução

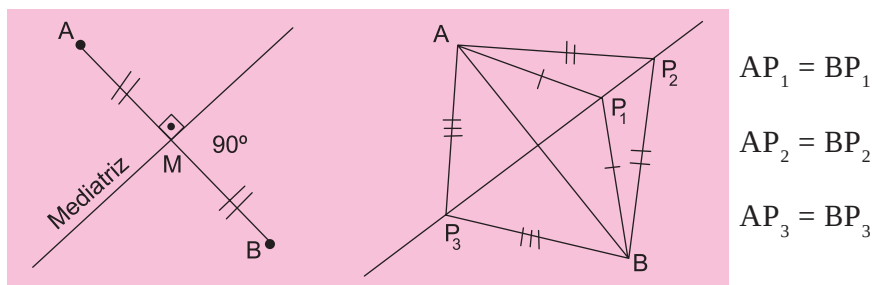
- As coordenadas do ponto D são $(-2, 2)$.
- A área do paralelogramo $ABCD$ é igual a 31 u.a.

Problema 5: Os pontos $A(-1,5)$ e $B(3, 7)$ são as extremidades do segmento AB . Determinar:

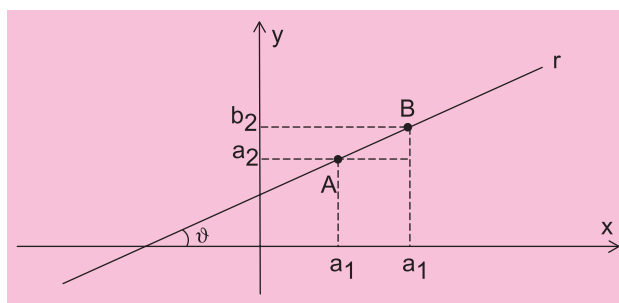
- O ponto de interseção da mediatriz de AB com o eixo dos x (abscissas).
- A distância da mediatriz de AB à origem $(0, 0)$ do sistema de coordenadas.

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Num plano qualquer, mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio deste mesmo segmento ou, ainda, é a reta formada pelos pontos equidistantes de A e de B, como ilustrado na figura abaixo.



- b) Num plano cartesiano munido de um sistema de coordenadas, eixo dos x ou eixo das abscissas é o subconjunto (reta) constituído de todos os pontos $(x, 0)$; neste caso, todos os pontos têm ordenada y igual a zero.
- c) Num segmento de extremidades $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, o seu ponto médio $M(x_m, y_m)$ é o ponto deste segmento que é equidistante de A e de B e suas coordenadas são $x_m = \frac{a_1 + b_1}{2}$ e $y_m = \frac{a_2 + b_2}{2}$.
- d) Quando uma reta r (não vertical) é definida por dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, o coeficiente angular ou declividade desta reta é dado pelo número $m_r = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \vartheta$ sendo $\Delta y = b_2 - a_2$, $\Delta x = b_1 - a_1$ e ϑ ângulo formado pela reta r e o eixo dos x conforme ilustra a figura abaixo:



- e) Duas retas r e s (não verticais), com coeficientes angulares m_r e m_s respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, é verificada a relação $m_r \cdot m_s + 1 = 0$, denominada condição de perpendicularidade.
- f) Todas as retas (não verticais) que passam por um ponto $P(x_0, y_0)$ têm equação dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$ ou $mx - y - mx_0 + y_0 = 0$, em que m é o coeficiente angular de cada reta; neste caso, a expressão algébrica de todas as retas (não verticais) que passam por P, em função do parâmetro m, é denominada equação do feixe de retas passando por P.

- g) A distância entre os dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ é o comprimento do segmento PQ, sendo obtida pela expressão

$$d_{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- h) A distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta $r: ax + by + c = 0$ é a menor das distâncias entre o ponto P e os pontos $Q(x, y)$ pertencentes à reta, isto é, o valor mínimo de $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$;

neste caso, o valor mínimo pode ser obtido por $d_{p,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$,

que é denominada fórmula da distância de P à reta r.

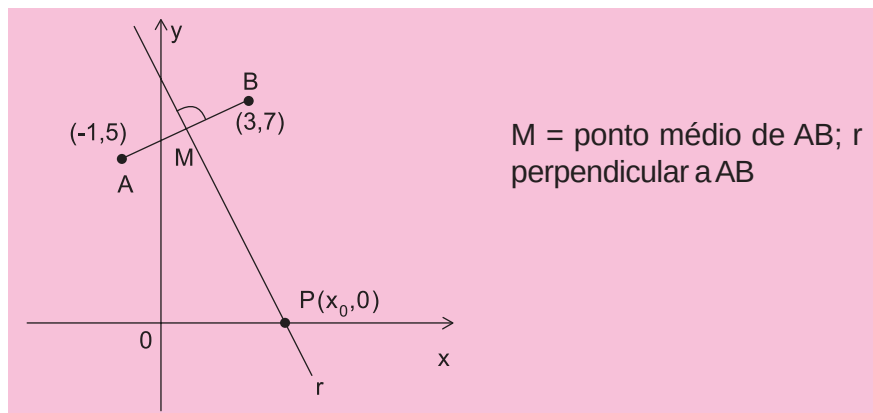
O valor mínimo de $y = ax^2 + bx + c$ é dado pela expressão (fórmula):

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \text{ no qual temos } \Delta = b^2 - 4ac.$$

II. Organização e execução do plano de resolução

Item a) Primeira possibilidade

- a) Construimos uma figura representativa da situação:



- b) Determinamos o ponto médio $M(x_m, y_m)$:

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_m &= \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(1, 6).$$

- c) Calculamos o coeficiente m_{AB} da reta que contém o segmento AB:

$$m_{AB} = \frac{7-5}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

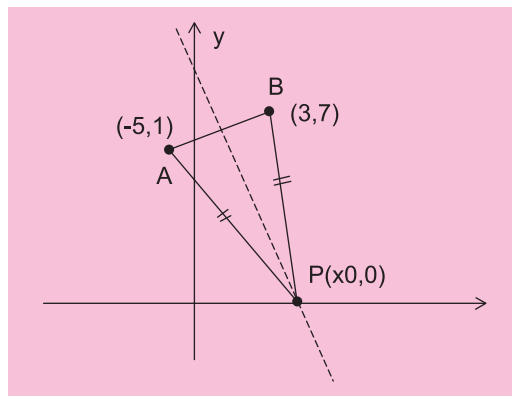
- d) Calculamos o coeficiente angular m_r da reta r, utilizando a condição

de perpendicularidade: $m_r \cdot m_{AB} + 1 = 0 \Rightarrow m_r \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow m_r = -2.$

- e) Obtemos a equação da reta r , utilizando a expressão do feixe de retas que passam por M :
 $y - 6 = (-2) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 6 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 8 = 0$.
- f) Determinar as coordenadas do ponto $P(x_0, 0)$, observando que estas coordenadas satisfazem a equação da reta r :
 $2x_0 + 0 - 8 = 0 \Rightarrow 2x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 4$, e, então, encontramos o ponto $P(4, 0)$.

Segunda possibilidade

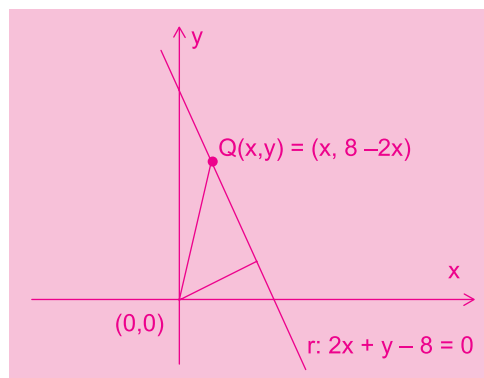
- a) Construimos uma figura representativa da situação:



- b) Calculamos as distâncias d_{PA} entre P e A e d_{PB} entre P e B :
 $d_{PA} = \sqrt{(x_0 - (-1))^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 1 + 25} \Rightarrow d_{PA} = \sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 26}$
 $d_{PB} = \sqrt{(x_0 - 3)^2 + (0 - 7)^2} = \sqrt{x_0^2 - 6x_0 + 9 + 49} \Rightarrow d_{PB} = \sqrt{x_0^2 - 6x_0 + 58}$
- c) Como P é equidistante de A e B , pois P está na mediatriz do segmento AB , igualamos as distâncias d_{PA} e d_{PB} e encontramos as coordenadas do ponto P :
 $d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 26} = \sqrt{x_0^2 - 6x_0 + 58} \Rightarrow$
 $x_0^2 + 2x_0 + 26 = x_0^2 - 6x_0 + 58 \Rightarrow 8x_0 = 32 \Rightarrow x_0 = 4$ e, então, obtemos o ponto $P(4, 0)$.

Item b) Primeira possibilidade

- a) Construimos uma figura representativa da situação:



Observando que a equação da reta r foi obtida na resolução do item anterior, donde tiramos o valor de y em função de x e obtemos as coordenadas do ponto genérico Q .

- b) Determinamos a distância do ponto $(0, 0)$, origem do sistema de coordenadas, ao ponto genérico Q :

$$d = \sqrt{x^2 + 64 - 32x + 4x^2} = \sqrt{5x^2 - 32x + 64}.$$

- c) Calculamos o valor mínimo de d , a partir do mínimo de $5x^2 - 32x + 64$: o mínimo de $5x^2 - 32x + 64$ é dado por:

$$- \frac{(-32)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 64}{4 \cdot 5} = - \frac{1024 - 1280}{20} = \frac{256}{20} = \frac{64}{5},$$

$$\text{ou seja, o valor mínimo de } d \text{ é } \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

- d) Então, a distância do $(0, 0)$ à mediatriz do segmento AB é igual a $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ unidades de comprimento.

Segunda possibilidade:

A distância do ponto $(0, 0)$ à reta $r: 2x + y - 8 = 0$ (mediatriz do segmento AB , cuja equação foi obtida na resolução do item anterior) pode ser encontrada utilizando a fórmula da distância de um ponto a uma reta:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 0 + 0 - 8}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ unidades de comprimento}$$

III. Verificação e confirmação da resposta

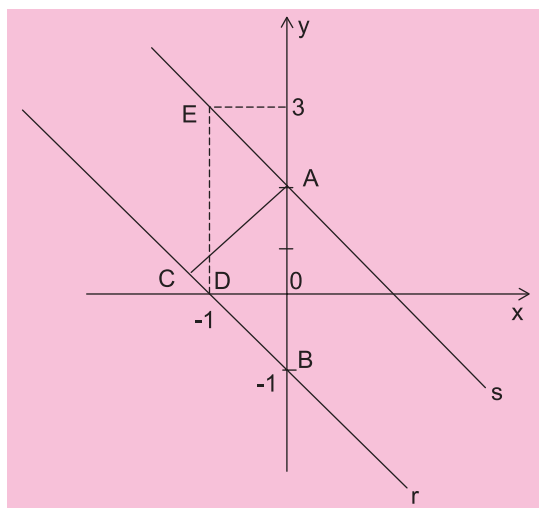
- a) O ponto procurado é $P(4, 0)$.

- b) A distância procurada é $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ u.c.

Problema 6: Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas, os pontos A e B pertencem ao eixo dos y , os pontos A e E pertencem à reta s , os pontos B, C e D pertencem à reta r e o segmento AC é perpendicular às retas. Com relação ao triângulo ABC , determinar.

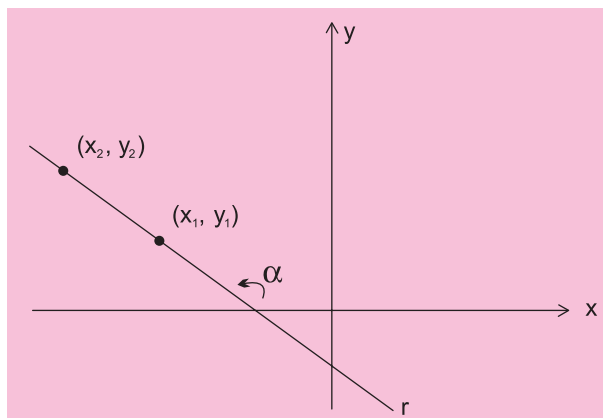
a) O comprimento do lado BC .

b) A área do triângulo.

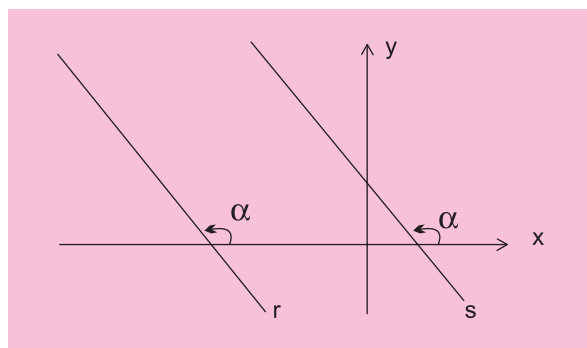


I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

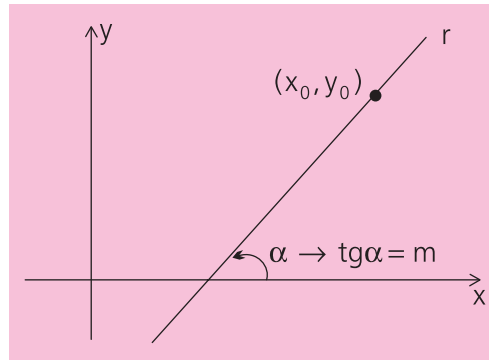
- a) Coeficiente angular: é o número m , calculado por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e que representa a tangente trigonométrica do ângulo α da figura:
 $m = \tan \alpha$



- b) Paralelismo de retas: duas retas r e s (não verticais), com coeficientes angulares m_r e m_s , são paralelas, se, e somente se $m_r = m_s$.



- c) Equação do feixe de retas: qualquer reta (não vertical) que passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) pode ser escrito na forma:
 $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ onde ***m*** é o coeficiente angular da reta.



- d) A área de um triângulo retângulo JKL, no qual os catetos medem *j* e *k*, é dada por $\frac{j \cdot k}{2}$.
- e) A área de um triângulo PQR, onde os vértices são os pontos $P(P_1, P_2)$, $Q(q_1, q_2)$ e $R(r_1, r_2)$, pode ser obtida (com o cálculo de um determinante

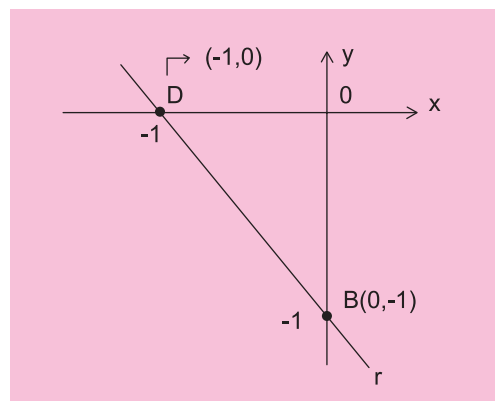
$$\text{através do valor absoluto de } S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{área (PQR)} = |S|$$

($|S|$ é conhecida como “fórmula da área do triângulo” cujos vértices são os pontos P, Q e R).

II. Organização e execução do plano de resolução

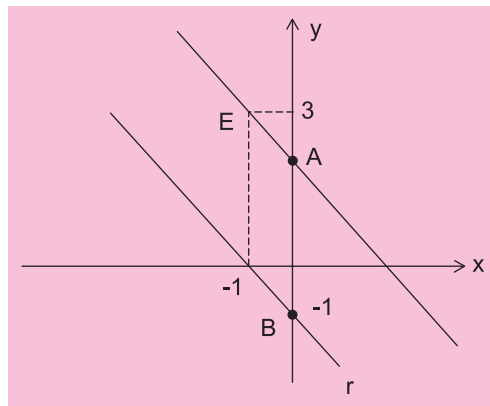
Ítem a) Inicialmente determinamos o coeficiente angular m_r da reta ***r***, que é igual ao coeficiente angular m_s da reta ***s*** porque ***r*** e ***s*** são paralelas.



$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \Rightarrow$$

$$m_r = \frac{0 - (-1)}{-1 - 0} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow m_r = m_s = -1$$

b) Obtemos a equação da reta s, que é paralela à reta r:



s passa pelo ponto **E** $(-1, 3) \Rightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 3 = m \cdot (x - (-1)) \Rightarrow$
 $y - 3 = m \cdot (x + 1) \Rightarrow s // r \Rightarrow m_s = m_r = -1 \Rightarrow y - 3 = -1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -x + 2$

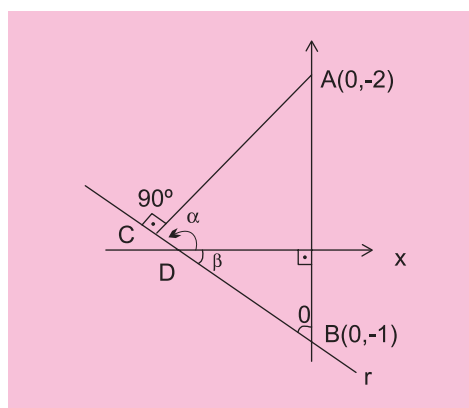
c) Determinamos as coordenadas do ponto A:

A está no eixo de ordenadas $\Rightarrow x_A = 0$.

A está na reta s, de equação $y = -x + 2$; logo:

$$\begin{cases} y_A = -x_A + 2 \\ x_A = 0 \end{cases} \Rightarrow y_A = 2 \Rightarrow A(0, 2)$$

d) Analisando o triângulo ABC, obtemos a medida da hipotenusa e do ângulo B:

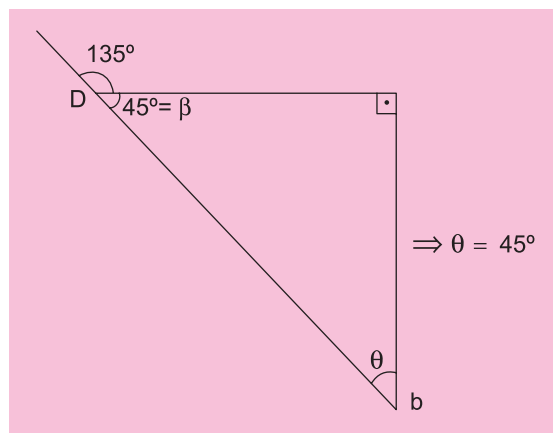


A hipotenusa do triângulo é o lado AB, cuja medida é obtida como segue: $AB = d_{AB} \sqrt{(0-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{0+9} = 3$.

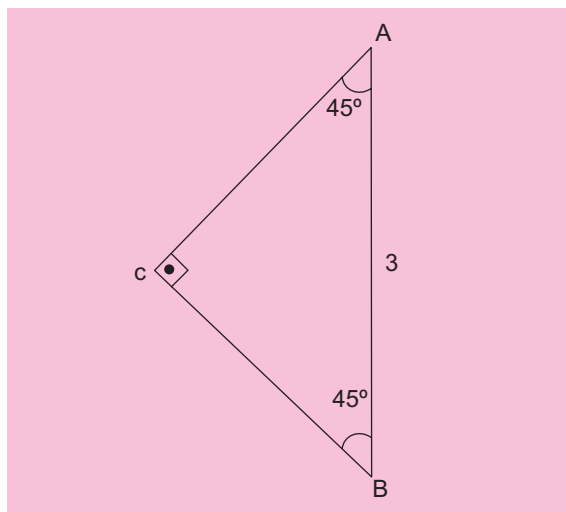
O ângulo interno θ , que é o ângulo do vértice B, pode ser obtido como segue:

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ \Rightarrow 135^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow 45^\circ + 90^\circ + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ = \hat{B}$$

ou seja,



e) Agora, olhamos para o triângulo ABC e obtemos o comprimento de BC:



Como o triângulo retângulo ABC é também isósceles (pois $\hat{A} = \hat{B}$), utilizando o Teorema de Pitágoras, vem: $BC^2 + AC^2 = 3^2 \Rightarrow BC^2 + BC = 9$

$$\Rightarrow 2 BC^2 = 9 \Rightarrow BC = \frac{9}{2} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ ou seja, a medida do lado BC}$$

(cateto) é $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento.

Item b) Primeira possibilidade

Como o triângulo ABC é retângulo e isósceles, com os catetos tendo comprimento $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, sua área é igual a $\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$ unidades de área.

Segunda possibilidade

a) Determinamos as coordenadas (x_C, y_C) do ponto C como segue:

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C(x_C, \frac{1}{2})$$

$$d_{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{(0 - x_C)^2 + (2 - \frac{1}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_C^2 + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{4x_C^2 + 9}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_C^2 + 9 = 18 \Rightarrow 4x_C^2 = 9 \Rightarrow x_C = -\frac{3}{2}$$

(porque o ponto C está no 2º quadrante), logo $C = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Encontramos, então, a área do triângulo ABC utilizando a fórmula

$$\text{de } |S|, \text{ como segue: } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} \Rightarrow |S| = \frac{9}{4} \text{ unidades de área.}$$

III. Verificação e confirmação da resposta

a) O comprimento do lado BC é $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ u.c.

b) A área do triângulo ABC é igual a $\frac{9}{4}$ u.a.

Problema 7: Sejam P (0, 15) e Q(20, 0) dois pontos pertencentes à reta r , no plano cartesiano. Obter:

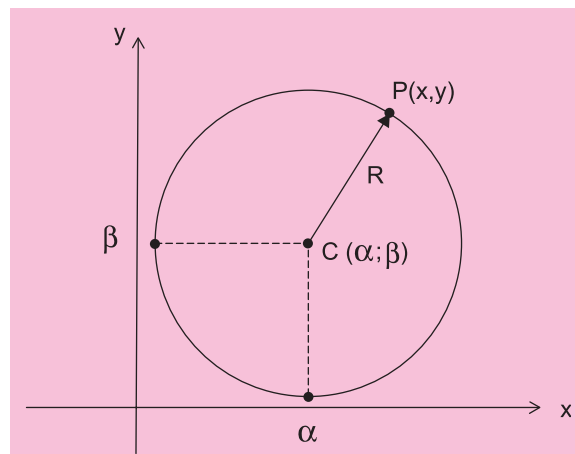
- A equação da circunferência cujo centro é a origem do sistema de coordenadas e que é tangente à reta r .
- A equação da reta s tangente à circunferência e paralela à reta r (com r e s não coincidentes).

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Equação da circunferência: a equação da circunferência de centro C (α, β) e raio R é:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

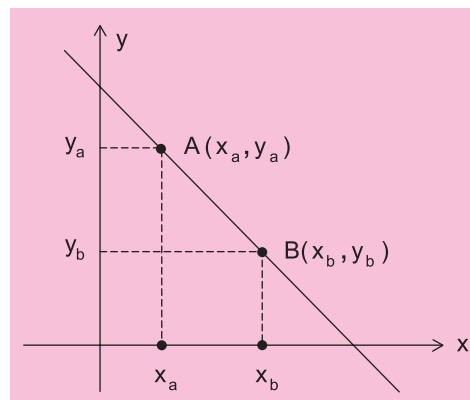
onde o par (x, y) representa as coordenadas de qualquer ponto da circunferência.



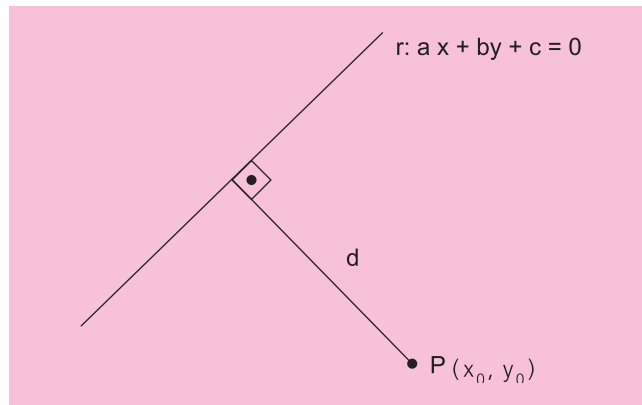
- b) Equação de reta: quando uma reta é definida por dois de seus pontos A e B, sua equação é obtida desenvolvendo o determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

onde o par (x, y) representa as coordenadas de qualquer ponto da reta AB.



- c) Distância de ponto a reta: distância do ponto P até a reta r é o comprimento d do segmento que tem uma extremidade em P e a outra em r , sendo perpendicular à r ,



Se o ponto P tem coordenadas (x_0, y_0) e a reta r é escrita como $a.x + b.y + c = 0$, então a distância d de P até r é dada pela fórmula:

$$d = d_{P,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

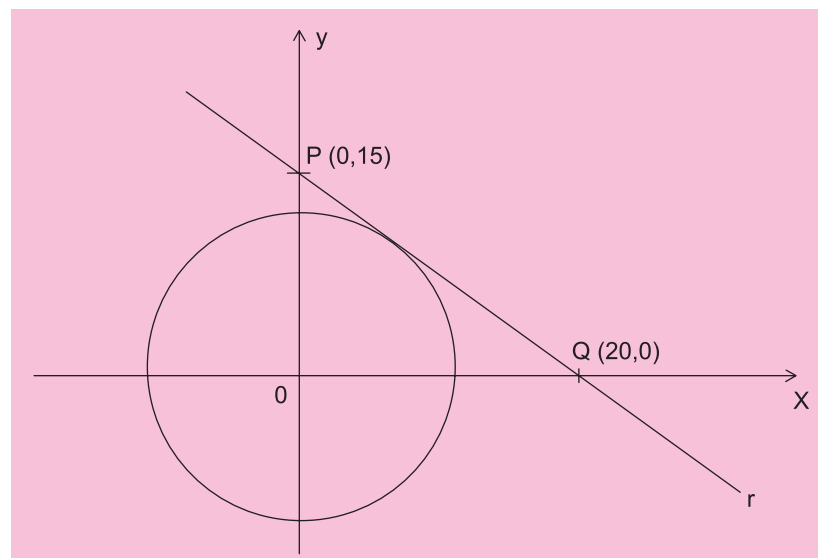
- d) Feixe de retas paralelas: todas as retas de um plano cartesiano que são paralelas a uma determinada reta r cuja equação é $ax + by + c = 0$ (a , b e c coeficientes fixos) podem ser escritas na forma $ax + by + k = 0$ (inclusive a própria reta r , quando $k = c$), sendo k um parâmetro que varia no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

A expressão $ax + by + k = 0$ com a e b fixos e k variando em $\mathbb{R}$ é denominada feixe de retas paralelas.

II. Organização e execução do plano de resolução

Item a)

- a) Apresentamos uma figura que ilustra a situação:



- b) Inicialmente obtemos a equação da reta r , contendo os pontos $P(0, 15)$ e $Q(20, 0)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 15 & 1 \\ 20 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 15x + 20y - 300 = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 60 = 0, \text{ que é}$$

a equação da reta r .

- c) Obtemos o valor do raio R da circunferência, que é igual à distância d do centro $(0, 0)$ à reta r :

$$R = d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 60|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{60}{\sqrt{25}} = \frac{60}{5} = 12$$

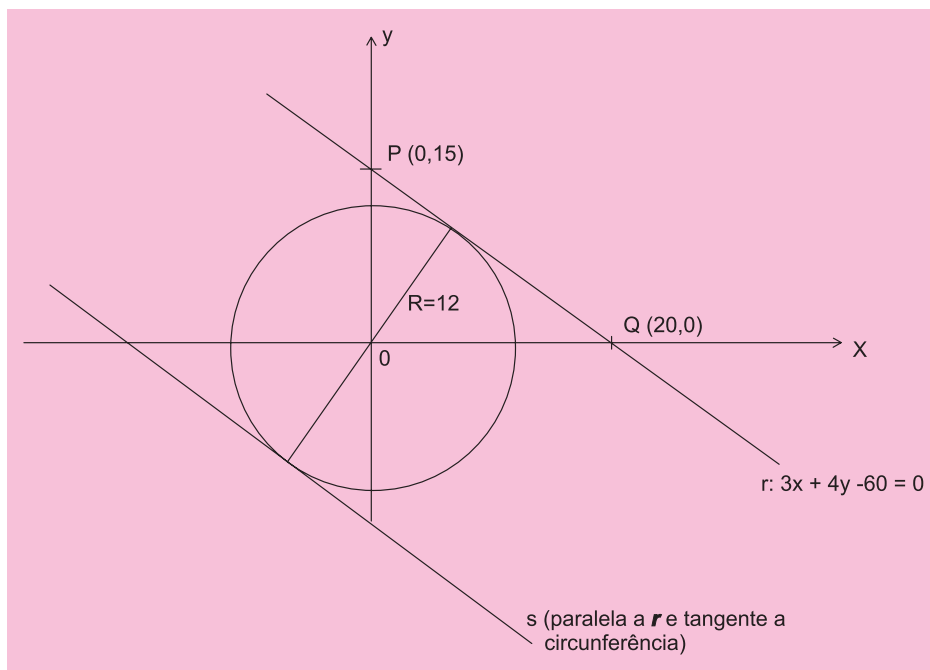
- d) Obtemos, então, a equação da circunferência de centro no ponto $(0, 0)$ e raio $R = 12$:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 12^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 144$$

$$\text{ou, equivalentemente, } x^2 + y^2 - 144 = 0.$$

Item b)

- a) Apresentamos uma figura que ilustra a situação.



- b) Obtemos a equação da reta s como segue:

Todas as retas paralelas à reta $r: 3x + 4y - 60 = 0$ podem ser escritas na forma $3x + 4y + k = 0$, onde k varia no conjunto dos números reais, incluindo o caso particular $k = -60$ que corresponde à própria reta r .

Para encontrar o valor de k que corresponde à reta s , impomos a condição da distância de $(0, 0)$ a s ser igual a 12.

$$\left| \frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 60}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 12 \Rightarrow \frac{|k|}{5} = 12 \Rightarrow |k| = 60 \Rightarrow k = \pm 60, \text{ donde reco-}$$

lhemos o valor $k = 60$ e, portanto, a equação da reta s é $3x + 4y + 60 = 0$.

III. Verificação e confirmação da resposta

- a) A equação da circunferência é $x^2 + y^2 - 144 = 0$
- b) A equação da reta $3x + 4y + 60 = 0$

Problema 8: Considere a circunferência no plano cartesiano, cuja equação é $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$. Determinar:

- a) O comprimento da corda AB que a reta $x + y - 3 = 0$ determina na circunferência.
- b) O ponto C que é o centro da circunferência e a área do triângulo ABC .

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Resolução, pelo método da substituição, de um sistema de equações.
- b) A distância entre os pontos $P(p_1, p_2)$ e $Q(q_1, q_2)$ pode ser obtida como segue: $d_{PQ} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.
- c) A área do triângulo cujos vértices são os pontos $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$ pode ser obtida como segue: área $(ABC) = |S|$, onde

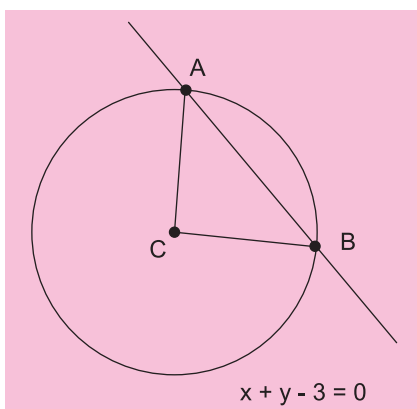
$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ (para o cálculo, é necessário conhecer o desenvol-}$$

vimento de determinante de ordem 3).

II. Organização e execução do plano de resolução

Item a)

- a) Apresentamos uma figura que ilustra a situação.



A e B são as extremidades da corda e C centro da circunferência.

- b) Obtemos os pontos A e B, resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

com o emprego do método da substituição, como segue:

$$x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - x \Rightarrow x^2 + (3 - x)^2 + 4x - 2(3 - x) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 9 - 6x + x^2 + 4x - 6 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 3 - (-1) = 4 \text{ e } y_2 = 3 - 1 = 2,$$

ou seja, A(-1, 4) e B(1, 2)

- c) Obtemos o comprimento da corda calculando a distância entre os pontos A e B:

$$AB = d_{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Item b)

- a) Determinamos, inicialmente, o centro da circunferência:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

ou seja, o centro é o ponto C (-2, 1).

- b) Obtemos, então, a área do triângulo ABC:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (-2 - 8 + 1 + 4 - 4 + 1) \Rightarrow S = \frac{1}{2} (-14 + 6) = \frac{1}{2} (-8) = -4$$

A área (ABC) é igual a 4 unidades de área.

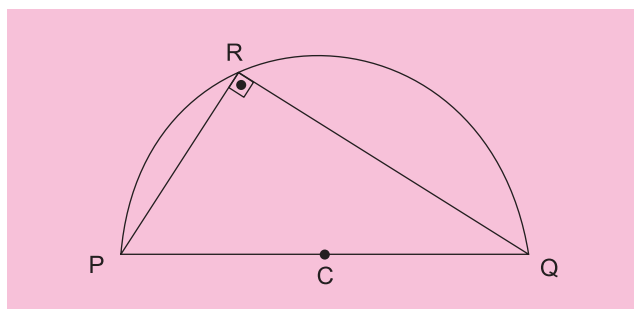
III. Verificação e confirmação da resposta

- a) O comprimento da corda AB é $2\sqrt{2}$ u.c.
b) O centro da circunferência é o ponto C (-2, 1) e a área do triângulo ABC é 4.u.c.

Problema 9: Obter a equação da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo cujos catetos estão sobre os eixos coordenados no plano cartesiano e a hipotenusa está sobre a reta $4x - 3y + 24 = 0$.

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Os pontos sobre os eixos coordenados têm as formas (x, 0), quando pertencentes ao eixo dos x ou das abscissas, e (0, y), quando pertencentes ao eixo dos y ou das ordenadas;
b) Todo triângulo retângulo é inscritível numa semicircunferência, sendo a hipotenusa do triângulo coincidente com o diâmetro da semicircunferência.



PQ = hipotenusa = diâmetro

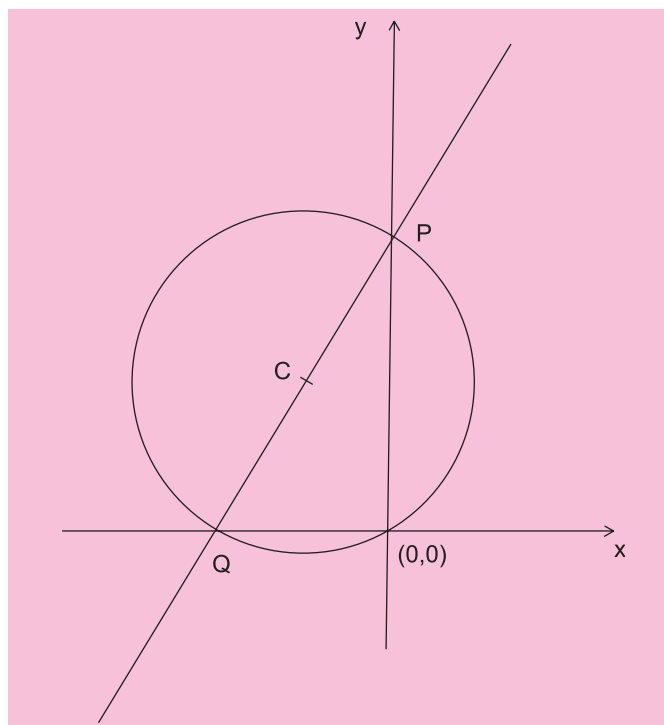
- c) O ponto médio de um diâmetro de uma circunferência é o centro da circunferência.
 d) A equação da circunferência cujo centro é o ponto C (c_1 , c_2) e R é o seu raio é:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2 \quad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - R^2 = 0$$

II. Organização e execução do plano de resolução

- a) Apresentamos uma figura ilustrativa da situação.



- b) Determinamos, agora, os pontos P e Q:
 Para encontrar o ponto P, substituímos $x = 0$ na equação da reta ($4x - 3y + 24 = 0$) e obtemos $4 \cdot 0 - 3y + 24 = 0$, donde $y = 8$ e, então, temos P(0, 8).

Para encontrar o ponto Q, substituímos $y=0$ na equação da reta e obtemos $4x - 3 \cdot 0 + 24 = 0$, donde, $x = -6$ e, então, temos $Q = (-6, 0)$.

- c) Determinamos, em seguida, o ponto C (x_0 , y_0) que é o ponto médio do segmento PQ (diâmetro da circunferência) e é o centro da circunferência:

$$x_0 = \frac{0 + (-6)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y_0 = \frac{8 + 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ ou seja, } C = (-3, 4).$$

- d) Obtenção do raio da circunferência:

O raio pode ser obtido tomando a metade do segmento (diâmetro) PQ, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} PQ &= \frac{1}{2} d_{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{(0 - (-6))^2 + (8 - 0)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 64} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{100} = \frac{1}{2} 10 = 5, \text{ ou, o raio também pode ser obtido através da} \end{aligned}$$

distância d do centro $(-3, 4)$ à origem $(0, 0)$, como segue

$$d = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \text{ portanto, o raio da circunferência é } R = 5.$$

- e) Obtemos, então, a equação da circunferência, como segue:

$$\begin{aligned} (x - (-3))^2 + (y - 4)^2 &= 5^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y &= 0. \end{aligned}$$

III. Verificação e confirmação da resposta

A equação procurada, da circunferência, é $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

Problema 10: Determinar a posição relativa da reta $r: 3x + 4y - 12 = 0$, com referência a cada uma das seguintes circunferências:

- a) $x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 9 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$

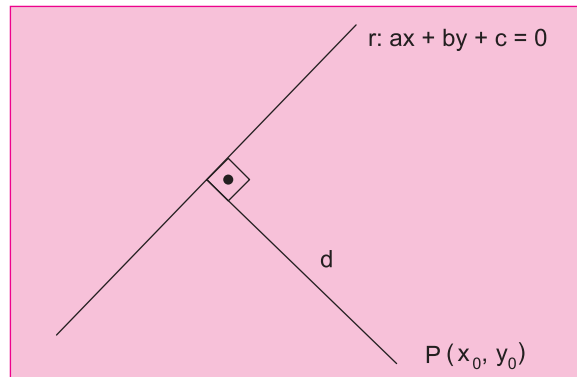
I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Se $C = (c_1, c_2)$ é o centro e R é o raio de uma circunferência, então sua equação é:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2 \text{ ou } d = d_{p,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - R^2 = 0.$$

- b) Distância de ponto a reta: distância do ponto P até a reta r é o comprimento d do segmento que tem uma extremidade em P e a outra em r , sendo perpendicular à r ,



Se o ponto P tem coordenadas (x_0, y_0) e a reta r é escrita como $a.x + b.y + c = 0$, então a distância d de P até r é dada pela fórmula.

II. Organização e execução do plano de resolução

Item a)

- a) Obtemos o ponto C , centro da circunferência $x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$, e o seu raio R :

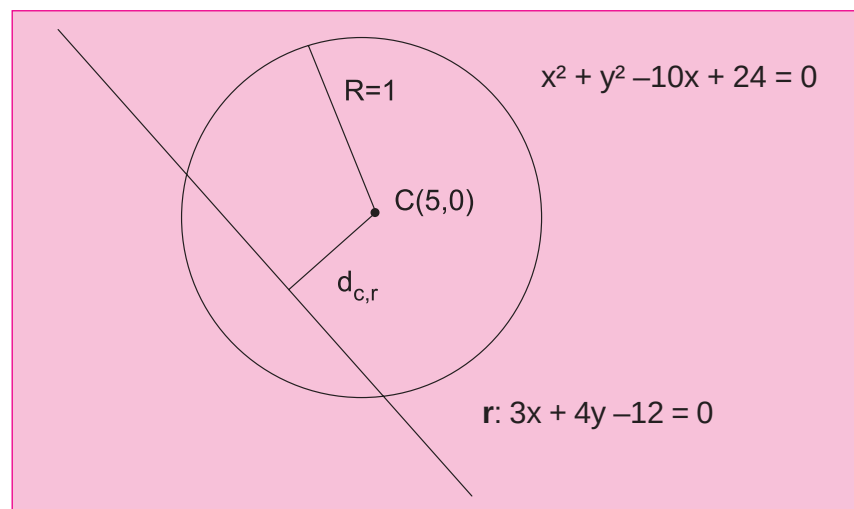
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0 &\Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 0)^2 - 25 + 24 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \text{ ou seja, } C(5, 0) \text{ e } R = 1. \end{aligned}$$

- b) Determinamos a distância $d_{C,r}$ do ponto C à reta r :

$$d_{C,r} = \left| \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{3}{5}.$$

- c) Identificamos a posição relativa da reta r com referência à circunferência:

$$d_{C,r} = \frac{3}{5} < 1 = R, \text{ logo, a reta é secante como ilustra a figura abaixo:}$$



Item b)

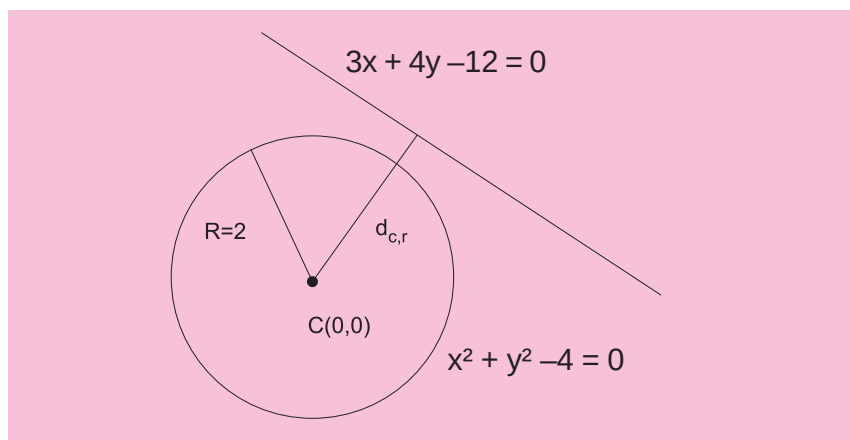
a) Obtemos o ponto C, centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4 = 0$, e o seu raio R: $x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$, ou seja, C (0, 0) e R = 2.

b) Determinamos a distância $d_{C,r}$ do ponto C à reta r :

$$d_{C,r} = \left| \frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{12}{5}.$$

c) Identificamos a posição relativa da reta r com referência à circunferência:

$d_{C,r} = \frac{12}{5} > 2 = R$, logo, a reta é externa à circunferência como ilustra a figura abaixo:

**Item c)**

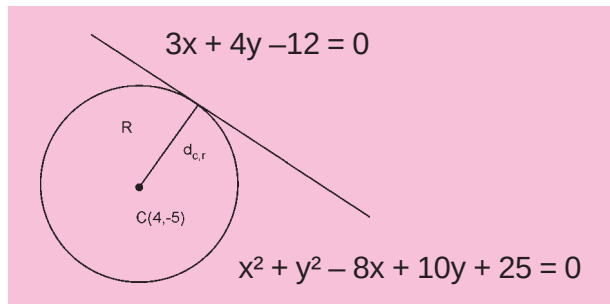
a) Obtemos o ponto C, centro da circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$, é o seu centro:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0 &\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 5)^2 - 16 - 25 + 25 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 4^2, \text{ ou seja, } C(4, -5) \text{ e } R = 4. \end{aligned}$$

b) Determinamos a distância $d_{C,r}$ do centro à reta r :

$$d_{C,r} = \left| \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{20}{5} = 4$$

- c) Identificamos a posição relativa da reta r com referência à circunferência: $d_{c,r} = 4 = R$, ou seja, a reta é tangente à circunferência como ilustra a figura abaixo:



III. Verificação e confirmação da resposta

- A reta é externa à circunferência.
- A reta é secante à circunferência.
- A reta é tangente à circunferência.

Problema 11: - Obter as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ que são paralelas à reta $x + y + 1 = 0$.

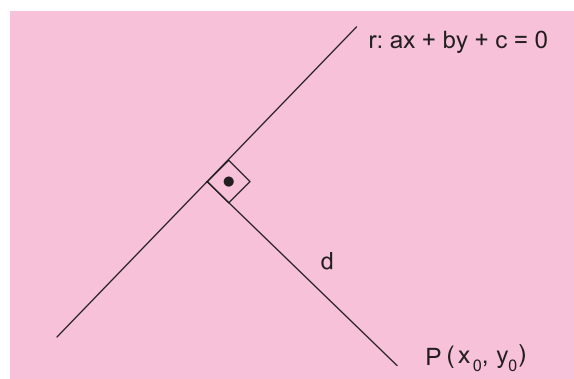
I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

- a) Equações da circunferência de centro e no ponto $C(c_1, c_2)$ e raio R :

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - R^2 = 0$$

- b) As retas cujas equações são $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são paralelas se, e somente se, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$; equações de retas paralelas, então, podem ser colocadas nas formas $ax + by + d_1 = 0$ e $ax + by + d_2 = 0$.

- c) Distância de ponto a reta: distância do ponto P até a reta r é o comprimento d do segmento que tem uma extremidade em P e a outra em r , sendo perpendicular à r ,



Se o ponto P tem coordenadas (x_0, y_0) e a reta r é escrita como $a.x + b.y + c = 0$, então a distância d de P até r é dada pela fórmula:

$$d = d_{p,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

II. Organização e execução do plano de resolução

a) Identificamos, inicialmente, o centro C e o raio R da circunferência:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 &= 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2, \text{ ou seja, } C(1, 1) \text{ e } R = 1; \end{aligned}$$

b) Todas as equações das retas paralelas à reta $x + y + 1 = 0$ podem ser escritas na forma $x + y + k = 0$, onde k é um parâmetro que varia no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e para cada valor de k temos uma reta representada pela equação.

c) Para determinarmos as retas $x + y + k = 0$ tangentes à circunferência igualamos a distância do centro à reta ao valor do raio, como segue:

$$\left| \frac{1+1+k}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = \frac{|2+k|}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow |2+k| = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+k = \pm\sqrt{2} \Rightarrow k_1 = -2 + \sqrt{2} \text{ e } k_2 = -2 - \sqrt{2}, \text{ donde concluímos que } x + y + 2 - \sqrt{2} = 0 \text{ e } x + y - 2 - \sqrt{2} = 0 \text{ são as equações procuradas.}$$

III. Verificação e confirmação da resposta

As equações procuradas são $x + y - 2 + \sqrt{2} = 0$ e $x + y - 2 - \sqrt{2} = 0$.

Problema 12: Obter a equação da circunferência que contém os três pontos $A(8, 11)$, $B(-4, -5)$ e $C(-6, 9)$.

Observação: verifique, inicialmente, que os pontos A , B e C não são colineares e, portanto, determinam uma única circunferência que os contém.

I. Compreensão e interpretação: a condicionante e suas partes (conceitos, propriedades e relações).

a) Os pontos $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$ são colineares se, e somente

$$\text{se, } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{para o cálculo, é necessário conhecer o}$$

desenvolvimento de determinante de ordem 3).

b) Se $C(c_1, c_2)$ é o centro e R é o raio de uma circunferência, então sua equação é: $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2$ ou $x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - R^2 = 0$.

- c) A distância entre os pontos $P(p_1, p_2)$ e $Q(q_1, q_2)$ pode ser obtida como segue:

$$d_{PQ} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}.$$

- d) Resolução de sistema de equações.

II. Organização e execução do plano de resolução

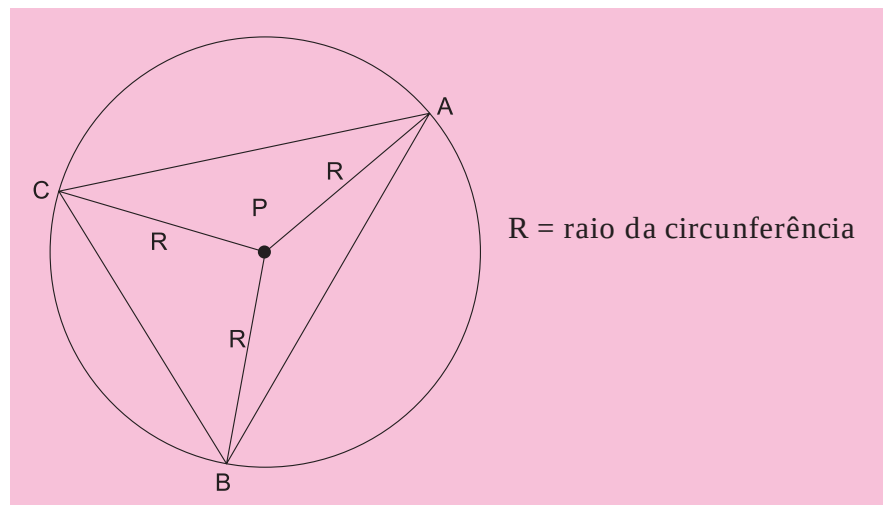
- a) Verificamos a colinearidade ou não dos três pontos A, B e C:
A, B e C são colineares se, e somente se, o determinante

$$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & 9 & 1 \end{vmatrix} \text{ é nulo.}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 8 & 11 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -40 - 66 - 36 - 30 - 72 + 44 = -200 \text{ não é nulo,}$$

segue que os pontos A, B e C não são colineares.

- b) Apresentamos uma figura ilustrativa da situação.



O ponto P centro da circunferência é o circuncentro do triângulo ABC.

- c) Firmando (p_1, p_2) como sendo as coordenadas do ponto P e R como sendo o raio da circunferência, obtemos a equação

$$(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 = R^2.$$

- d) Como os pontos A, B e C pertencem à circunferência, suas coordenadas verificam a equação e, então, passamos a obter as coordenadas do ponto P:

$$(8 - p_1)^2 + (11 - p_2)^2 = R^2 \Rightarrow (-4 - p_1)^2 + (-5 - p_2)^2 = R^2 \Rightarrow (-6 - p_1)^2 + (9 - p_2)^2 = R^2$$

ou seja,

$$p_1^2 + p_2^2 - 16p_1 - 22p_2 + 185 = R^2 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + 8p_1 + 10p_2 + 41 = R^2 \Rightarrow$$

$$p_1^2 + p_2^2 + 12p_1 - 18p_2 + 117 = R^2$$

donde, subtraindo a primeira igualdade da segunda e da terceira

$$24p_1 + 32p_2 - 144 = 0$$

$$28p_1 + 4p_2 - 68 = 0 \text{ ou ainda}$$

$$3p_1 + 4p_2 - 18 = 0 \Rightarrow 7p_1 + p_2 - 17 = 0$$

e, resolvendo o sistema acima, obtemos $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$;

logo, encontramos o ponto P (2, 3).

- e) Determinamos o raio R calculando a distância de P a um dos pontos dados:

$$R = d_{PA} = \sqrt{(2 - 8)^2 + (3 - 11)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

poderíamos, também ter adotado o valor de R a partir de uma das equações tratadas no item anterior.

- f) Obtemos, finalmente, a equação da circunferência:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 100 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$$

III. Verificação e confirmação da resposta

A equação da circunferência é $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$

Observação: substituindo as coordenadas dos pontos A (8, 11), B(-4, -5) e C (-6, 9) na equação encontrada verificamos que, de fato, esses pontos pertencem à circunferência.

Bibliografia

1. BIGGE, M.L, Teorias da Aprendizagem para Professores, São Paulo, E.P.U., 1977.
2. BRASIL. Qualidade da Educação: uma nova leitura do desempenho dos estudantes da 3ª série do Ensino Médio. Brasília: MEC: INEP, 2004.
3. BUTCHER, H.I., A Inteligência Humana, S.Paulo, Perspectiva, 1981.
4. COLL,C, Os Conteúdos da Reforma, P. Alegre, Artes Médicas,1998.
5. DELVIN, Keith, O Gene da Matemática, R. Janeiro, Record, 2005.
6. GALVES, Grécia, Didática da Matemática, P. Alegre, Artes Médicas,1996.
7. GARDNER, Howard, Inteligência: Um conceito reformulado, R. Janeiro, Objetiva, 2001.
8. MAZULO, A.P.R., et all, Construindo a Matemática - Ensino Médio (Vol. I, II, III) - Fortaleza, SEDUC, 2004.
9. MILHEN, Steven, A Pré- História da Mente, S. Paulo, UNESP, 2002.
10. POLYA, G., A Arte de Resolver Problemas, R. Janeiro, Inter-Ciência, 1995.
11. VIDAL, Eloísa M. et all, O Currículo do Ensino Médio Cearense, Fortaleza: SEDUC, 2005.

Sobre os autores

Antonio de Pádua Raposo Mazulo, é mestre em Educação pela UFC e Assessor Técnico da Secretaria da Educação Básica.

Carlos Alberto Barbosa, é especialista em Matemática, foi professor do Departamento de Matemática da UECE e tem vasta experiência em Formação Continuada de Professor de Matemática.

Guilherme Lincoln Aguiar Ellery, é doutor em Matemática, foi professor da disciplina na UFC e UECE e presta consultoria na área em escolas públicas e privadas.

João Marques Pereira, é doutor em Matemática, foi professor de Matemática da UFC, é atualmente professor da UECE e atua na área de formação de professores de Matemática para o Ensino Médio.

Este livro foi composto na fonte Arial, corpo 10,5, e Palatino, corpo 11,5; 16.
O miolo foi impresso em papel off set 75g / m² e a capa em cartão supremo 250g / m².
Editoração Eletrônica, impressão e acabamento nas Edições Bagaço em 2006